塔構造、分解素点、ゼータ函数

—奇の発見を原点とした整数論発展史に則って—

（アブストラクト）

伊原康隆

思いがけず、身に余る賞とこの記念講演の機会をいただき深く感謝しております。私は有名な未解決問題を解いて世間を驚かせることはできませんでした。ただ、自分が驚けることは常に求め、いくばくかをみつけ、発表し、後輩たちや海外を含む多くの方々の有難い参画を得て研究を進めることができました。いずれも偉大な先輩たち（日本発生を含む）による「希少な構造」の発見の歴史に多くを負っており、たまたま時期的事情から整数論での最初に受賞者に選んでいただいたのでしょうが、より長い時間のスパンの中の話として聞いていただきたいと思います。

具体的対象への好奇心と独自の見方、工夫された計算、偶然などによる特異構造の発見と、さらにそれをパラメータ付きに一般化して奥にある函数の問題として眺めようとする構成的試みとが整数論の発展の大切な源でした。リーマンのゼータ函数（この意味では「オイラー・リーマンのゼータ函数」）然り、モジュラー函数然り。さらに、より近年の岩澤理論、谷山理論、志村理論いずれもが内容豊富な具体的新構造の発見と構成であり、それぞれ、p 進 L 函数、量指標の L 函数、様々な保型 L 関数、との結びつきの発見とも切り離せません。

しかし整数論でのここ四、五十年間は、否定的一般論「そういう解は有限個しかない、全くない、この範囲にしかない」「よい性質をもつ不連続群、あるいは格子群、は既知のものに限られる」といった方向の結果が目立っています。これらは自然認識として重要だし、証明方法は上で発達した理論の応用でもあり、それぞれの見事さは正に数学発展の金字塔。私も（理解程度に

応じて）感嘆しつつ、そろそろ、予想された結果の証明法のではなく新構造の発見に時代の舵が切り戻されるのでは、と期待もしています。

整数論は「美しいだけで価値がある」といった世間での好意的印象も有難いのですが、だからといってそれに甘んじて「解の非存在自体が重要である」などとは、胸に手を置いていえることではありません。実は、一見「奇」だが存在する構造、順次なされたそれらの発見の方が、時代を経て思わぬところで役に立っているようです。ほんの一例としては、有理点を豊富にもつ有限体上の曲線系列が、あるいは選ばれた格子群が（いずれも）符号理論に、など。

さて約６０年間に、私の研究対象は

イ）代数群の整数論—コンパクト型モジュラー形式論の「はしり」($USp(4)$)

ロ）セルバーグ式ゼータ関数との出会いとモジュラー及び志村曲線を「縦方向」の切り口で見る視点、つまり曲線を mod p で眺める際の素数 p は固定しそれでこそ見えてくる曲線の被覆無限系列の構造を生かす、を見つけたこと、その視点からの出発の、いってみれば一歩目と二歩目、

ハ）数体上のガロア群の、閉体上の代数曲線の基本群への作用による大きなガロア表現の、多くが他の方々との共同の研究 、特に（ロ) の基本例でもあった「射影直線 $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群」の場合の、次数付き安定リー環、係数がスーレ指標で特殊値がヤコビの和となる２変数冪級数（とその持ち上げの非可換冪級数)、高次円単数 (with G. Anderson) 等、

ニ）古典的ゼータ函数と L 函数から生じる値分布関数の、特に松本耕二氏との共同研究、オイラー・クロネッカー定数（代数体の不変量として）の限界曲線、等、（そして戻ったり）

と変遷してきており、それぞれ独立でもあるが共通の「切り口」や「軸」もありました。それらにおける初期の「開墾と種まき」を高く評価していただけたのでしょうか。それらの痕跡が現世代にまで伝わっているかどうかそう明らかでもないのに、とても有難いことです。ただ、特にどれとはお聞きして

いませんので、自ら話の軸を一つ選ぶことになりました。まず検討したのは比較的近過去の (ハ) と (ニ) でしたが、これらは幸い現在も活発に研究が進められており流動的です。そして現在の流れは、今の私には残念ながら把握し切れておりません。他方、(ロ) に端を発する研究については、その二、三の「副産物」は後の重要な諸研究で有効に使われているようですが、そのコアに関しては（つまらない問題の筈がないからやっぱり、難しいのかな？）動きが大体とまっているようです。それを今日の話の軸—遠過去と未来をやや荒っぽく結ぶ軸—とし、その理由とともに話を進めたいと思います。

話の流れ（暫定的；あっさり通過項目も含む）
（前半）はじめに/ 方程式と素数列/ 素数とリーマン・ゼータ函数/
共役類とセルバーグ・ゼータ函数/ 素数とガロア群のフロベニウス共役類/
「素因子-共役類対応表示塔」を求めて/ ラングランズの双対性哲学との関連
（中休み）数論の特異な構造の発見小史–モジュラー函数と超特異モジュライ
（後半）無限次不分岐拡大体における基本不等式（数体、函数体）/
等号成立の稀な場合は?/ 豊富な有理点を持つ有限体上の代数曲線と応用/
函数体での素因子-共役類対応表示塔/ 一般リーマン予想検証の標的としての不等式……

なお、最近私は代数体の場合の数値実験のプログラムを組んで、こみ入った実例の計算にも少しずつ取り組んでおり、たとえば如何なる数値計算が、論証の試み以前に正しい見当をつけるのには有効か？ こういった話からも整数論の面白さと困難さの一端でも感じ取っていただければ幸いです。

以下少々立ち入ります。整数論の中心的な対象は素数（またはその拡張や類似である「素因子」）ですが、素因子の集合における隠されて見えない構造はどこにあるのか？ これに関して我々専門家が「鍵」と見なしているのが次の一言に凝縮されています。

"Galois is equipped with Frobeniuses"
二人の名前が、それぞれ群、共役類、の代名詞として使われていてちょっと楽しいので印象に残りやすいでしょう。数論的な大域体 k （有理数体の親類など）のガロア拡大 K/k の場合には、そのガロア群 G は単なる群ではない、基礎体 k の素因子 P は、K/k で分岐する有限個を除けば、群 G のそれぞれ特定の共役類「フロベニウス共役類」を定め、逆に見れば「G の各共役類は k の素因子 P たちを分類している」のです。特に、単位元だけからなる共役類と対応するのは K/k で完全分解する素因子たちです。たとえば k が有理数全体、K がそれに虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ をつけた体なら、分岐素数は 2 だけで、奇素数 p に対するフロベニウス置換は $\{i \to i^p\}$ 、これが単位元になるのは 4 で割ると 1 余る p たちです。

この幾何的な類似物は、閉曲面 X の有限不分岐被覆 $Y \to X$ において X 上の（つぶれない）閉曲線 γ を Y 上で辿る話でしょう。これが被覆の枚数個の閉曲線の disjoint な和に分かれるのが完全分解で、それ以外の様々な分かれ方がある、ガロア被覆なら下の起点は固定しその上の一つの起点から辿ってできる Y 上の閉曲線が定めるガロア群の共役類は起点の持ち上げ方によらない、これと対応します。それぞれの基本群と共役類の間の純群論的な話になります。

以上を踏まえて考察を進めましょう。数論的な体の素因子の集合は、ガロア拡大ごとに生じるこの分類をしたのちには群の共役類としての構造をもつわけですが、いかなる極限移行（ここでラングランズ・プログラムから、少なくもとりあえず、離れます）がその素因子-共役類関係を緊密にし、見やすくしてくれるだろうか？ つまり、射

$$Primes\ of\ k \to Conjugacy\ classes\ in\ G = Gal(K/k) \qquad (1)$$

がなるべく 1 対 1 に近く見やすくなる塔 K/k を探すにはどうすればよいか?
その指針の一つが、無限次不分岐ガロア拡大体 K/k における以下の（基本

的と思われる）不等式です。これは k が有限次代数体 (NF-case)、有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の代数曲線の函数体 (FF-case) 共通に成立、ただし NF-case ではデデキントのゼータ函数へのリーマン予想の拡張 (GRH) を仮定します。

定理（J.Math.Soc.Japan 35-4）K/k で準完全分解する k の素点 P（無限素点を含む）全体を S と書くとき

$$\sum_{P \in S} \alpha_P \quad \leq \quad \log \sqrt{|d_k|} \qquad (NF,\ under\ GRH) \tag{2}$$

$$\leq (g-1)\log q \qquad (FF) \tag{3}$$

ここで P が準完全分解とは、K/k のガロア群 G での P のフロベニウス共役類の（代表元の）位数 f_P が有限ということ、α_P はその適当な意味の「重さ」> 0 であり、ノルム $N(P)$ が大きい程、また f_P が大きい程、限りなく小さくなる。NF-case では、k の無限素点は全て S に属し、α_P は P が実か虚かに応じて定まる正の数。FF-case では、S が空でない限り $\mathbf{F}_q$ の K 内での拡大は有限次。右辺の d_k は代数体 k の判別式、g は函数体の種数。

さて、(2)(3) が等号で成り立つ塔 K/k が存在した場合、その塔は「数論的に緊密」と呼ぶことにしましょう。最も有限に近い無限、という感覚でもある。その理由は、等号が成り立つとはその無限次の塔に於いて準完全分解する素点が「精一杯豊富」にあり、これ以上「引き締める」、つまり S 以外のたった 1 つの素点でもそれを準完全分解せしめる部分ガロア拡大体をとると k 上有限次になってしまう、言い換えると「無限位数の元からなるフロベニウス共役類のうちたった 1 つのある整数 $(\neq 0)$ 冪をとっても、それ 1 つで G の指数有限正規部分群を生成してしまう、それほどに位数無限フロベニウス共役類たちが G 上に満遍なく分布している、を意味するからです。これは対応 (1) が多少とも「近いもの同士になる兆し」のように私は感じます。

そして上記（ロ）によって、FF-case では数論的に緊密な塔が現に存在します。より正確には、任意の有限体と「数論的に選ばれた、すなわち志村曲線型の」基礎体 k に対してです。この場合、コンパクト完全非連結なガロア

群 G はその数論的役割を或る $(\infty \times p)$ 進的離散群 Γ にとって代わられるのです（補足１)。そもそも、志村曲線を「縦に見る」ことから離散群 Γ とそのセルバーグ式ゼータが導入され、それと曲線の合同ゼータとの「ズレ」が塔での準完全分解素点の寄与（この場合、$f_P \leq 2$,（$P \in S$)）として、幾何的には「$\mathbf{F}_{q^2}$ 上での豊富な通し有理点の存在」として認識され（60 年代)、やや時代を経てその応用へのスポットライトが当たり、有限体上の曲線の有理点の個数の集中的な研究も一斉に始まりました (80 年代)。ただ、素点-共役類ほぼ 1 対 1 対応の拡張への試みの方はあまり進んでいないようです。いずれにせよこれら代数幾何的整数論の議論の中に私のささやかな貢献や他の理論で使われた副産物も含まれます（補足１)。当日はこの話と代数体の場合との対比の話との重点配分が難しい、小平先生からの真夏の宿題！ ああ。

（補足 1) 函数体の場合の数論幾何的研究の主要項目
(i) この Γ は線型群 $SL_2(\mathbf{Z}[1/p])$ の「４元数環親族」であり、S を定める一方でその（∞-elliptic, p-hyperbolic）な原始的共役類たちは k の素点集合から S を除いた部分とフロベニウスを通して 1 対 1 に対応し、Γ の指数有限部分群と塔内の有限次拡大も 1 対 1 に対応 —旧聞中の旧聞に属することですが。
(ii) 志村曲線のヘッケ対応 (correspondence) $T(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は p を割る素因子）は、その合同関係式によって、有限体上の次の 3 曲線系の標数 0 への持ち上げ（広い意味の変形）と見なせ、一般の変形理論の言葉で可能性、困難さ双方が記述されます。

$$C \leftarrow \Pi + \Pi' \rightarrow C'$$

ここで C, C' は $\mathbf{F}_q$ 上で互いに共役な $\mathbf{F}_{q^2}$ 上の代数曲線、Π, $\Pi' \subset C \times C'$ は一方から他方への q 乗写像のグラフ。私の Γ の研究のうち標数 p 側からのものは $T(\mathfrak{p})$ の出所由来に頼らずにこの持ち上げ可能性だけを出発点としています（他の方々の貢献の詳細を含め、文献 (a) 参照)。上の 離散群Γ は、

この持ち上げが定める3つのリーマン面の基本群たちの融合部分群つき自由積としても現れます。ちなみに、この関連のレンマは、志村ー谷山予想（→フェルマ）に関する　Wiles-Taylor の論文で、問題の保型形式のレベルを下げる証明の中で、使われました。
(iii) 例外素点集合 S は、Π と Π' の交点の内で微小変形で離れないもの（の C への射影）であり、modular 曲線の場合は supersingular moduli と対応。一般にそれらを零点とする k の多重微分 ω と、$T(\mathfrak{p})$ が定める3対のリーマン面の同時一意化を与える微分方程式とがシュヴァルツの微分方程式の代数的、数論的考察によって直接結びつくこと (文献 (b))。

（補足2) この研究は「異端視」されてもいました。実はそうお考えのむきが今でもかなりおられるようですので、この機会に一部でもご再考いただきたいと思います。その一つは、「ラングランズ・プログラムの多少の例をその言葉を使わずにやっているのだろう」という解釈。かの双対性哲学は、表現（ℓ-進表現も含む）の次数ごとにガロア群を切ってから対応する次数の保形 L 関数と比較するのであり、この極限移行はその切り口からでは見えにくい別問題ではないでしょうか。もう一つは、有限体の上の函数体の場合はラングランズ・プログラムもラフォルグ（等）によって証明されていて何も残っていない筈という解釈。ところが函数体の場合、L 函数のオイラー積の因子たちは皆共通の変数 $u = p^{-s}$ の冪級数であり、それらの無限積は大量に消去しあうので、L 関数の情報から得られる大域的な情報はごく限られる—自分で実例を書いてみればわかります（文献 (a) Author's Notes 2008)。かつてヴェイユもオイラー積の個々の因子と積の相違を警告しており、セールもこの文献をお送りしたとき、ヴェイユの警告が理解されていないことを嘆きつつ私の見解に同意してくれました。

なお私は、ラングランズ・プログラム自体には幾多の意味で感嘆していて解説記事も書きました。またご本人とも、1966-67 年プリンストン大学（私は客員）でご一緒だった頃、週一回院生向けの「リレー講義」をするなど、

親しかったので、これは、キーワードのファッション性に即影響されやすい世間の風潮に対する抗議のひとこと以上のものではありません。

逆風としてはこの他、$(\infty \times p)$-adic に対しても、なぜアデール全体ではないのか、というのもありましたが、これは焦点の当て方によって何が新たに見えるかの問題、内容からご判断下さい。

（アブストラクトでの引用文献）

(a) Y.Ihara "On Congruence Monodromy Problems" MSJ Memoirs Vol 18 (2008)
1968,69 年の東大講義録の再出版、巻末の Author's Notes 2008 にその後の展開の要約。
(b) Y.Ihara "On $(\infty \times p)$-adic uniformization of curves mod p with assigned many rational points" RIMS Kokyuroku 2120 (July, 2019) in: "Profinite monodromy, Galois representations, and Complex multiplications" (M.Kaneko org., held 2018/05/21 05/23)
微分 ω の詳しい話。函数体の場合の局所理論の具体的な記述は、単数群が普遍的記述を持たないため、当初から基本的な壁に阻まれる。まず如何なる「順次正規化が必要か？」から。

他の文献も、京都大学数理解析研究所ホームページ > 研究所について > メンバー > 名誉教授 > ○○ > PapersList から検索可能