第２回日本数学会賞小平邦彦賞受賞講演

連続関数の空間での偏微分方程式

Partial differential equations in a space of continuous functions

儀我　美一　(東京大学 大学院数理科学研究科)*

1　はじめに

偏微分方程式を具体的な関数を用いて解くことは、線形であっても一般には難しい。例えば $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω でポアソン方程式

$$-\Delta u(x) = \rho(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \tag{1}$$

を考えよう。ρ は既知関数とする。また、$\Delta = \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)^2$ はラプラシアンを表す。数学以外の分野では ∇^2 と書くことが多い。また幾何学では $-\Delta$ を Δ と書くこともある。(1) は ρ を定めても解 u は定まらない。そこで、例えば境界 $\partial\Omega$ 上の値を指定するディリクレ境界条件を考える。g を $\partial\Omega$ 上の既知関数として

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{2}$$

を考える。仮に $\rho \equiv 1$, $g = 0$ といういわゆる「ねじれ問題」を考えても、領域 Ω が球のような特別な場合を除いて、初等関数で表される解をみつけることは困難である。(Ω が半径 R の球の場合、$u(x) = (R^2 - |x|^2) \,/\, 2n$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ は解である。) そこで性質の似たような関数を集めた関数空間の中で、解をみつけていくことになる。

関数空間の中で、Ω の位相さえ定まれば定義できる Ω 上の連続関数の空間 $C(\Omega)$ は簡単に定義できる基本的な空間である。空間 1 次元の場合は「ρ が Ω で連続ならば（超関数の意味での）解 u は C^2 級、つまり $u \in C^2(\Omega)$」となるが、空間 2 次元以上ではそうはいかない。実際 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2 \,(-\log|x|)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ は（超関数の意味で）$-\Delta u$ は連続だが、u 自体は $x = 0$ で 2 階微分が不連続となる。方程式 (1) では、ρ の微分可能性より、解 u の微分可能性が 2 階よくなることが期待される。このような性質は**最大正則性**と呼ばれている。この最大正則性の空間として連続関数の空間が適さないことにより、偏微分方程式の解の存在、一意性をいうためにヘルダー空間、L^p 空間、ベゾフ空間 [Sa] など、さまざまな関数空間が必要になってくる。その中で 2 乗可積分関数の空間である L^2 空間はヒルベルト空間であり、関数解析が使いやすい空間ではあるが、関数の連続性

---

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: `labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp`
web: `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ygiga/`
本研究は科研費 (課題番号: 20K20342, 19H00639)、共同研究費 (アリスマー (株), (株) 荏原製作所, ダイキン工業 (株)) の助成を受けたものである。
2020 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 35Q40, 47D06, 53E10
キーワード：等高面解, 粘性解, 解析半群, ストークス・加藤半群, 連続関数の空間

をいうのにかなり高階微分を評価する必要があり、非線形問題の解析には不十分である。最大正則性はポアソン方程式のような楕円型方程式ではなく、熱方程式やナヴィエ・ストークス方程式のような放物型方程式においても重要である。これについては最近の柴田の著書 [Sh] を参照してほしい。

一方、2 階の楕円型方程式には、**最大値原理**がある。これは、(1), (2) で $\rho \equiv 0$ の場合、解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ の最大値 $\max_\Omega u$（最大値 $\min_\Omega u$）に対して

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} g, \ (\min_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} g)$$

が成立するというものである。これにより (1), (2) の $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ での解はただ一つしかないことがわかる。（2 つの解の差を考えればよい。）最大値原理は、1 変数関数がその極大点で 1 階微分がゼロ、2 階微分が非正であるということに基づいている。この原理を基に、微分可能とは限らない関数に対して作った弱解の概念として、今日よく用いられる概念に**粘性解**がある。詳しくは [CIL], [Ko], [I] を参照してほしい。この概念は、1980 年代前半に最適制御理論の値関数の特徴づけから生まれたものであるが、後年 [CGG], Evans-Spruck [ES] により平均曲率流方程式のような曲面の発展方程式の、特異点発生の後まで追跡できる、今日**等高面解**と呼ばれる解の構成に応用されている。その後の等高面法の発展については [G] を参照してほしい。本稿では、当時触れられなかったディリクレ問題について解説する。粘性解理論は、変分構造が弱い完全線形非線形問題に応用できるだけでなく、正則性の問題と解概念を分けられるという利点がある。上述の最大値原理では、u を粘性解とみれば、u の C^2 性は不要になる。粘性解理論で得られる解は連続関数となることが多く、関数解析の理論を駆使せずに扱えることも利点である。しかし、最大値原理に基づいているために、それが成立しない方程式についての応用、例えば方程式系への応用は現時点では限定的である。

連続関数の空間では滑らかさの度合いを測りにくいということではあるが、熱方程式の平滑化効果を測ることは連続関数の空間でも可能である。本稿ではナヴィエ・ストークス方程式の線形化方程式であるストークス方程式（系）についての結果を紹介したい。

なお、非線形問題では、解の存在よりも解の一意性が問題となることが多い。特に解概念を弱めたときにはなおさらである。解の一意性の初等的な解説は、粘性解の簡単な解説を含めて [GG2] を参照してほしい。

2 平均曲率流のディリクレ問題と等高面法

平均曲率流方程式は、その起源を材料科学に持つが、今日微分幾何学を中心としたさまざまな数学分野で研究されている「部分多様体の発展方程式」である。微分幾何学的アプローチについては、[KoN] を参照してほしい。この方程式の特徴は有限時間で特異点が発生しうることである。特異点発生ののちの解を追跡する方法は Brakke によるヴァリフォールドといった変分解析的な弱解を用いる方法 [To] が 1970 年代に知られていたが、1990 年代に [ES], [CGG] で創設された等高面法も有効である。その後、等高面法は特異

な異方的平均曲率流方程式であるクリスタライン平均曲率流にも拡張された。（サーベイ論文 [GP] 参照。）本稿では、今までほとんど取り上げられてこなかったディリクレ問題について述べる。詳細は [BGM] を参照してほしい。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の超曲面の族 $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ に対して

$$V = H \ (\Gamma_t\text{上}), \quad b\Gamma_t = \Sigma, \quad t > 0 \tag{3}$$

を初期条件 $\Gamma_t|_{t=0} = \Gamma_0$ の下で考える。ここで V は Γ_t の単位法ベクトル ν 方向の法速度、H は Γ_t の ν 方向平均曲率の $n-1$ 倍とする。また $b\Gamma_t$ は Γ_t の幾何学的境界を表し、Σ は与えられた $n-2$ 次元の埋め込まれた閉多様体で時間によらないとする。境界がない場合と同様 $n \geq 3$ では曲面がちぎれうる（図 1）が、$n = 2$ でも Γ_t が境界にぶつかりうる（図 2）。

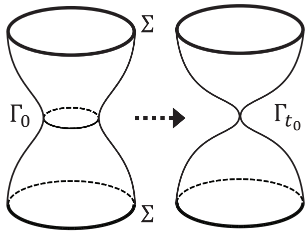

図 1　時刻 t_0 でのちぎれ

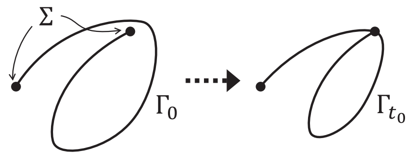

図 2　時刻 t_0 で Σ に衝突

等高面法 [G] では Γ_t を、$\mathbb{R}^n$ で定義された補助関数 u の零点集合とみなし、$V = H$ を u の方程式で書き換え、Γ_t 上だけでなく $\mathbb{R}^n$ 上で考える。$V = H$ は Γ_t 上では

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \tag{4}$$

となるが、それを $\mathbb{R}^n$ で考える。境界値問題では、超曲面 Γ_t は $\mathbb{R}^n$ を 2 つの部分に分けないが、平均曲率流のように向きづけによらない方程式の場合、Γ_t 上だけで $u = 0$、その他で $u > 0$ という解を考えることで、運動を記述できる。ディリクレ条件は、

$$u \leq \psi(x) := \operatorname{dist}(x, \Sigma) \left(:= \inf_{y\in\Sigma} |x - y|\right)$$

という障害物条件に置き換える。等高面方程式の障害物問題については、既に [M] で粘性解を用いてその概念が確立されている。非負の解に限定した書き方に直すと以下のようになる。

定義 1 ([BGM]). 閉集合の族 $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ が初期値 Γ_0 の (3) の**等高面解**であるとは、(4) に $0 \leq u \leq \psi$ を課した障害物問題の粘性解 u で、$\mathbb{R}^n \times [0, T)$ で一様連続でかつ $\Gamma_t = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; u(x, t) = 0\right\}$ となるものが存在するときをいう。

障害物がない場合と同様に次を示すことができる。証明の鍵は、方程式 (4) の順序保存構造にある。

定理 1 ([BGM])**.** 閉集合 Γ_0 を初期値とする (3) の等高面解 Γ_t は時間大域的にただ一つ存在する。($u|_{t=0}$ の取り方によらない。) Σ を $n-2$ 次元の部分多様体とし、Γ_t^s を時間局所的な滑らかな (3) の解とする。このとき Γ_0 を初期値とする等高面解 Γ_t と一致する。

Sternberg-Ziemer [SZ] は Σ が平均曲率凸領域 Ω の境界上にあり、さらに $\Gamma_t \backslash \Sigma \subset \Omega$ の場合について等高面解を定義し、構成している。この解とも等高面解は一致している。

今後の課題　平均曲率流の場合は、そのディリクレ問題は障害物問題と考えればよいことがわかったが、$V = H + 1$ のように向きづけによる動きの場合はどう考えればよいか。[OTG] のようにリーマン面のようなものを考えればよいのであろうか。そこでは、スパイラル成長を、Σ の近傍を除く領域でのノイマン問題として扱っている。

3 ストークス方程式の平滑化効果

3.1 熱半群の解析性

まず熱方程式

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{5}$$

を $\mathbb{R}^n$ で考えよう。ガウス核 $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-|x|^2/4t\right)$ を用いると、

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y) u_0(y)\, \mathrm{d}y = (G_t * u_0)(x)$$

は、例えば u_0 が有界であれば、$t > 0$ で u は滑らかで、かつ (5) を満たす。u_0 がさらに一様連続であれば、$u(\cdot,t)$ は t の関数として u_0 に $t \downarrow 0$ で一様収束すること、すなわち $\lim_{t\downarrow 0} \|u(\cdot,t) - u_0\|_\infty = 0$ である。ここで空間変数 $x \in \mathbb{R}^n$ の関数 f に対して、$|f|$ の最大値ノルムを $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ で定義した。f が x と t の関数であるとき、$\|f\|_\infty(t) = |f(\cdot,t)|_\infty = \sup_x |f(x,t)|$ と書く。直接計算することにより、最大値原理

$$\|u\|_\infty(t) = |u_0 * G_t|_\infty \le \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x-y)|\, G_t(y)\, \mathrm{d}y \le \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} G_t(y)\, \mathrm{d}y = \|u_0\|_\infty, \quad t > 0$$

が示せる。さらに

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_\infty (t) \le \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x-y)|\, |\partial_t G_t(y)|\, \mathrm{d}y \le \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t G_t(y)|\, \mathrm{d}y.$$

ここで $t \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t G_t|\,(y)\, \mathrm{d}y$ は $z = y/t^{1/2}$ と置くことにより、t によらない次元のみによる定数 $c(n)$ となることがわかるので、$t \|\partial_t u\|_\infty (t) \le c(n) \|u_0\|_\infty$ を得る。t が 0 付近では、u_0 が微分可能でなくても t についての滑らかさが出るということで平滑化効果を表し、t が大きいところでは減衰を表している。ここまでは微分積分学のよい演習問題である。(例えば [GG] を参照せよ。)

初期値 u_0 に対して解 u の時刻 t での関数 $u(\cdot,t)$ を対応させる写像 $T(t)$ は、$T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s \ge 0$ という「半群性」を持つ。バナッハ空間における解析半群 (正則半群) は熱方程式の持つ上述の平滑化効果の一つの抽象化と考えられる。

定義 2. バナッハ空間 X での有界線形作用素の族 $\{T(t)\}_{t>0}$ が**解析半群**であるとは

(i)（指数法則） $T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s > 0,$

(ii) $\|T(t)f\|_X \le c_1 \|f\|_X,\ t \in (0,1),$

(iii) $t \longmapsto T(t)$ が有界線形作用素値として微分可能で

$$t \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t) f \right\|_X \le c_2 \|f\|_X, \quad t \in (0,1),$$

(iv) $T(t)$ が、ある $t \equiv t_0 > 0$ で 1 対 1 写像

をすべて満たすときをいう。さらに $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_X = 0$ のとき C_0 **解析半群**という。ここで c_1, c_2 は f と t によらない定数を表す。

熱半群 $T(t) : u_0 \longmapsto u(\cdot, t) = G_t * u_0$ が、$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$, $BUC(\mathbb{R}^n)$ で C_0 解析半群であることは、解の表示より直接示せる。ただし $C_0(\mathbb{R}^n)$ は、台コンパクトな滑らかな関数全体 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ の最大値ノルムによる閉包を表す。この空間は、空間無限大でゼロに収束する連続関数全体となる。$BUC(\mathbb{R}^n)$ は有界一様連続関数全体を表す。ここで、C_0 や BUC は $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間である。なお $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ や $BC(\mathbb{R}^n)$（有界連続関数の空間）では、C_0 でない解析半群になっている。（解析半群と呼ばれる理由は、t について複素正則（解析）関数に拡張できるからである。）

有界領域のように領域に境界がある場合は境界条件をつけることになるが、解の具体的表示は難しくなってくる。そのため、方程式をラプラス変換し、レゾルベント方程式という楕円型方程式を扱うことが多い。解析性は、L^p $(1 < p < \infty)$ の場合は楕円形のいわゆる L^p アプリオリ評価から従うが（例えば田辺 [Ta] 参照)、L^∞ や C_0 ではさらなる技巧が必要で、今日 Masuda-Stewart 法と呼ばれている。一般の 2 階放物型方程式について L^∞ の場合を含めた解説は Lunardi [Lu, 第 3 章] にある。基本的なアイデアは増田 [Ma2] に詳述されている。一方 [Ma1] はアナウンスメントである。両方とも日本語のせいか、[Lu] には言及されていない。なお Stewart の論文には技術的不備があり、それらは [Lu] や平良 [Tai] で修正されている。$p = 1$ のときも成立している。例えば [Ou, 第 7 章] を参照してほしい。（この文献をご教示された側島基宏氏（東京理科大学）に感謝いたします。）

以下、典型的な結果をまとめておく。Ω を $\mathbf{R}^n$ の滑らかな有界領域として熱方程式のディリクレ問題

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, &\quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0, &\quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned}$$

を考える。初期値 u_0 としたときの解作用素 $u_0 \longmapsto u(\cdot,t)$ を $u(\cdot,t) = e^{t\Delta_D u_0}$ で表す。

定理 2. 熱半群 $e^{t\Delta_D}$ は $C_0(\Omega)$ および $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ で C_0 解析半群である。$L^\infty(\Omega)$ では（非 C_0）解析半群である。

3.2　ストークス・加藤半群の解析性

液体力学の基礎方程式である非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式を、流速ゼロのまわりで線形化した方程式をストークス方程式（またはストークス近似）といい、レイノルズ数が小さいときによく用いられている。本節では Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域とする。ストークス方程式は速度場 $u=(u^1(x,t),\dots,u^n(x,t))$ と圧力場 $q=q(x,t)$ の方程式で

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) + \nabla q(x,t) = 0, &\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \operatorname{div} u(x,t) = 0, &\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, &\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \end{aligned}$$

と表される。ただし、密度を 1、粘性係数を 1 と正規化している。この初期値を u_0 としたときの解作用素 $S(t): u_0 \longmapsto u(\cdot,t)$ を**ストークス・加藤半群**と呼ぶ。（通常は、ストークス半群というが、この半群性を利用してナヴィエ・ストークス方程式を抽象的枠組みで解くことを最初に提唱した加藤敏夫先生 [KF] のお名前を入れた。）領域 Ω が $\mathbb{R}^n$ の場合は熱方程式の問題に帰着できるが、境界がある場合は半空間の場合であっても帰着できない。この場合も L^p 空間の場合の研究が先行した。発散ゼロの条件を関数空間に取り込むために、次のソレノイダル空間を導入する。

$$\begin{aligned} C^\infty_{c,\sigma}(\Omega) &:= \left\{ v\in (C^\infty(\Omega))^n \;\middle|\; \operatorname{div} v = 0,\ v \text{ の台は}\Omega\text{でコンパクト} \right\}, \\ L^p_\sigma(\Omega) &:= C^\infty_{c,\sigma}(\Omega) \text{ の } (L^p(\Omega))^n \text{ での閉包}, \\ C_{0,\sigma}(\Omega) &:= C^\infty_{c,\sigma}(\Omega) \text{ の } (L^\infty(\Omega))^n \text{ での閉包} \end{aligned}$$

とする。このとき

定理 3. 領域 Ω を滑らかな有界領域とする。このとき $S(t)$ は $L^p_\sigma(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ で C_0 解析半群である。

この定理は Solonnikov [Sol1] で放物型方程式の L^p での最大正則性を用いて示されているが、レゾルベント法により、より強い結果が [G1] で示されている。その後、さまざまな非有界領域で正則性が示されているが、最終的には領域が一様に滑らかであれば、L^p-ヘルムホルツ分解が成立すれば必ず $S(t)$ は $L^p_\sigma(\Omega)$ で C_0 解析半群であることがレゾルベント評価により示されている [GHHS]。なお $p=1$ では $S(t)$ が $L^1_\sigma(\Omega)$ 上の半群にならないことが、Ω が半空間の場合に知られている [DHP]。外部領域の問題で、ナヴィエ・ストークス方程式の解が L^1 値として時間について連続になるためには、領域にかかる力の和がゼロでなければならないことが知られている [Koz]。

ストークス・加藤半群について、$C_{0,\sigma}$ や L^∞ での解析性は長年の未解決問題であったが、約 10 年前に解決された。結果を述べるために、次の空間を定義する。

$$L^\infty_\sigma(\Omega) := \left\{ v\in (L^\infty(\Omega))^n \;\middle|\; \int_\Omega v\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \text{ が任意の } \nabla\varphi\in\left(L^1(\Omega)\right)^n \text{ に対して成立する。} \right\}$$

定理 4. 領域 Ω を滑らかな有界領域とする。このとき $S(t)$ は $C_{0,\sigma}$ で C_0 解析半群である。$L^\infty_\sigma(\Omega)$ では（非 C_0）解析半群である。

この定理は、最初爆発法という背理法でストークス方程式を直接解析することにより示された [AG]。後に、Masuda-Stewart 法の改良により、レゾルベント評価から得られることもわかった [AGH]。外部領域やさまざまな領域に対して成立するが、L^p-ヘルムホルツ分解が成り立たなくても、上述の解析性がいえることがある [AGSS]。それは、ポアソン方程式のノイマン問題について用いていることが異なっているからである。次節で、この問題を取り上げる。なお、領域 Ω が半空間 $\mathbb{R}^n_+$ の場合は解の具体的表示を用いて、定理 4 の主張を示すことができる [DHP]。半空間では、一様 L^p 空間 L^p_{ul} $(1 < p \leq \infty)$ でも、$S(t)$ が解析半群であることも知られている [MMP]。

3.3 ヘルムホルツ分解

コンパクト・リーマン多様体上の滑らかな k 次微分形式 ω をある調和形式 h と $k-1$ 次形式 φ、$k+1$ 次形式 ψ を用いて $\omega = h + d\varphi + d^*\psi$ と一意に分解できることはドラム・ホッジ・小平分解として ω が滑らかな場合、よく知られている。ここで d は外微分、d^* はその共役作用素を表す。この分解は、ドラム・コホモロジーの元を調和形式として実現できることを示す重要な分解である。小平 [Kod] では、相対コホモロジーに拡張している。さらに藤原 [Fu] により精密化されている。ベクトル場に対する対応する分解はヘルムホルツ・ワイル分解と呼ばれている。特にベクトル場の滑らかさを単に L^p とすると、3 次元内の領域としても、その進展は最近である。これについては、興味深い話題が満載されている論説 [KSY] を参照してほしい。本稿で触れるのは $h + d^*\psi$ の部分をまとめたヘルムホルツ分解である。（これをヘルムホルツ・ワイル分解ということもある。）領域 $\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$ 上の L^p-ベクトル場の空間 $(L^p(\Omega))^n$ に対して、バナッハ空間としての直和分解

$$(L^p(\Omega))^n = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G^p(\Omega) \tag{6}$$

を**ヘルムホルツ分解**という。ただし $G^p(\Omega)$ は L^p-勾配場の空間、すなわち

$$G^p(\Omega) := \left\{ \nabla q \;\middle|\; \nabla q \in (L^p(\Omega))^n,\ q : 局所可積分関数 \right\}$$

とする。特にベクトル場 v が $v = v_0 + \nabla q$, $v_0 \in L^p_\sigma(\Omega)$ と一意に分解されることを主張している。v_0 は形式的には、Ω で $\operatorname{div} v_0 = 0$, 境界 $\partial\Omega$ で $v_0 \cdot \nu = 0$ を満たす。ただし、ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法ベクトル場を表す。両辺の div を取ることにより q は $-\Delta q = \operatorname{div} v$（$\Omega$ 内)、$\partial q/\partial\nu = v \cdot \nu$（$\partial\Omega$ 上）を満たす。これはポアソン方程式のノイマン問題である。この問題が適切に解ければ、ヘルムホルツ分解ができるのである。

ヘルムホルツ分解は $p = 2$ のとき、任意の領域 Ω に対して成立する。一般の $p \in (1, \infty)$ のときは、$\partial\Omega$ が（一様に）滑らかな場合、Ω が $\mathbb{R}^n$、半空間、有界領域 [FM], [Sol1, $n = 3$]、外部領域 [Sol1, $n = 3$]、層領域 [Mi]、すなわち $\Omega = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; a < x_n < b \right\}$ な

どさまざまな領域で成立する [Ga]。しかし、成立しない領域も存在する [Bo]。例えば図 3 のような 2 次元角状領域である。$q_\theta = \frac{2}{1+\pi/\theta}$, $1/q_\theta + 1/q'_\theta = 1$ とする。

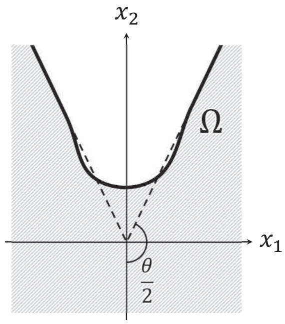

図 3　2 次元角状領域

命題 1 ([Bo])**.** 滑らかな 2 次元角状領域 Ω では、ヘルムホルツ分解 (6) は $p > q'_\theta$ または $p < q_\theta$ で成立しない。

したがって $\theta > \pi$ ならば (6) が成立しない $p \in (1, \infty)$ が存在する。一方 [FKS] によれば $\widetilde{L}^p$ 空間を

$$\widetilde{L}^p_\sigma = \begin{cases} L^p_\sigma \cap \left(L^2(\Omega)\right)^n, & (2 \le p < \infty) \\ L^p_\sigma + \left(L^2(\Omega)\right)^n, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

と定義すれば、任意の一様に滑らかな領域で成立することが知られている。また図 1 を含む n 次元リプシッツ角状領域においては、境界接方向には L^2 であるような非等方的ルベーグ空間でも成立することが知られている [MM]。

もちろん $p = 1$, $p = \infty$ では $\Omega = \mathbb{R}^n$ でもヘルムホルツ分解は成立しない。したがって $C_0(\Omega)$ のような空間はヘルムホルツ分解ができない。それは Δ の最大正則性が $C(\Omega)$ では成り立たないことを反映している。L^∞ 空間では (6) は不成立なので代替空間として BMO（有界平均振動関数の空間）型空間を用意する必要がある。適切な空間を定義すれば、分解定理が得られる [GGu]。

ヘルムホルツ分解ができなくても、ストークス・加藤半群の $L^p_\sigma(\Omega)$ での解析性がいえることがある。

定理 5 ([AGSS], [BGMST])**.** 滑らかな 2 次元角状領域 Ω の境界が関数のグラフで表されているとする。このとき $S(t)$ は $L^p_\sigma(\Omega)$ $(2 \le p \le \infty)$ で解析半群である。($p < \infty$ ならば C_0 解析半群である。)

ここで注意したいのは、L^2 と L^∞ を補間して L^p の結果を得ることはできないことである。なぜならば L^∞ から L^∞_σ への連続な射影が期待できないことである。そこで、[BGMST] では BMO 型空間での $S(t)$ の解析性の結果（[BGS] など）を元に補間をして、

L^p_σ $(p \geq 2)$ での解析性を示した。

これらの結果は領域でのノイマン問題の解の振舞いによる。まず $d_\Omega(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ と定義する。

定義 3. 領域 Ω が**ノイマン領域**であるとは、ある $r \geq n$ と定数 C が存在して

$$\sup_{x\in\Omega} |d_\Omega(x)\nabla u(x)| \leq C \sup_{x\in\partial\Omega} |g(x)|$$

が $\nabla u \in (L^r(\Omega) \cap L^2(\Omega))^n$, $g \in L^\infty(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ となる

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & (\Omega\text{内}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mathrm{div}_{\partial\Omega}\, g, \quad g \cdot \nu = 0 & (\partial\Omega\text{上}) \end{cases}$$

の「弱解」u について成立するときをいう。（ここで $\mathrm{div}_{\partial\Omega}$ は表面発散を表す。）

一連の $S(t)$ の L^∞ 型の結果は Ω がノイマン領域であることを示すことによって得られる。[AG] では、この条件と少し異なる形で領域の条件が与えられていて「許容領域」と呼んでいる。滑らかな有界領域、外部領域や、定理 5 の 2 次元角状領域はノイマン領域であるが、層領域 $(n \geq 3)$ はノイマン領域にはならない。実際、von Below-Bolkart [BB] により、この場合 $S(t)$ は L^∞_σ で解析半群にならないことが示されている。

未解決問題　$S(t)$ が $L^p_\sigma(\Omega)$ で解析的でない一様に滑らかな領域は存在するのか。

参考文献

[AG] K. Abe and Y. Giga, Analyticity of the Stokes semigroup in spaces of bounded functions. *Acta Math.* 211 (2013), no. 1, 1–46.

[AGH] K. Abe, Y. Giga and M. Hieber, Stokes resolvent estimates in spaces of bounded functions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 48 (2015), no. 3, 537–559.

[AGSS] K. Abe, Y. Giga, K. Schade and T. Suzuki, On the Stokes semigroup in some non-Helmholtz domains. *Arch. Math. (Basel)* 104 (2015), no. 2, 177–187.

[BB] L. von Below and M. Bolkart, The Stokes equations in layer domains on spaces of bounded and integrable functions. *Math. Nachr.* 290 (2017), no. 10, 1553–1587.

[BGM] X. Bian, Y. Giga and H. Mitake, A level-set method for a mean curvature flow with a prescribed boundary, preprint.

[Bo] M. Bogovskii, Decomposition of $L_p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ into the direct sum of subspaces of solenoidal and potential vector fields. *Doklady Mathematics* 33 (1986), no. 1, 161–165.

[BGMST] M. Bolkart, Y, Giga, T.-H. Miura, T. Suzuki and Y. Tsutsui, On analyticity of the L^p-Stokes semigroup for some non-Helmholtz domains. *Math. Nachr.* 290 (2017), no. 16, 2524–2546.

[BGS] M. Bolkart, Y, Giga and T. Suzuki, Analyticity of the Stokes semigroup in *BMO*-type spaces. *J. Math. Soc. Japan* 70 (2018), no. 1, 153–177.

[CGG] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.* 33 (1991), 749–786.

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 27 (1992), 1–67.

[DHP] W. Desch, M. Hieber and J. Prüss, L^p-theory of the Stokes equation in a half space. *J. Evol. Equ.* 1 (2001), no. 1, 115–142.

[ES] L. C. Evans and J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature. I. *J. Differential Geom.* 33 (1991), 635–681.

[FKS] R. Farwig, H, Kozono and H. Sohr, An L^q-approach to Stokes and Navier-Stokes equations in general domains. *Acta Math.* 195 (2005), 21–53.

[Fu] D. Fujiwara, A relative Hodge-Kodaira decomposition. *J. Math. Soc. Japan* 24 (1972), 609–637.

[FM] D. Fujiwara and H. Morimoto, An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 24 (1977), no. 3, 685–700.

[Ga] G. P. Galdi, An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. *Springer, New York,* 2011.

[GHHS] M. Geissert, H. Heck, M. Hieber and O. Sawada, Weak Neumann implies Stokes. *J. Reine Angew. Math.* 669 (2012), 75–100.

[GG2] M.-H. Giga and Y. Giga, A basic guide to uniqueness problems for evolutionary differential equations, *Birkhäuser,* to appear.

[G1] Y. Giga, Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces. *Math. Z.* 178 (1981), 297–329.

[G] Y. Giga, Surface Evolution Equations. A Level Set Approach. Monographs in Mathematics, 99. *Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin,* 2006.
日本語入門書：儀我 美一, 陳 蘊剛, 動く曲面を追いかけて –チュートリアル 応用数理の最前線–, 日本評論社, 1996.

[GG] 儀我 美一, 儀我 美保, 非線形偏微分方程式 –解の漸近挙動と自己相似解–，共立講座 21 世紀の数学 25，共立出版，1999.
英訳と増補版：M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal, Nonlinear partial differential equations. Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 79. *Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA,* 2010.

[GGu] Y. Giga and Z. Gu, The Helmholtz decomposition of a space of vector fields with bounded mean oscillation in a bounded domain. *Math. Ann.* 386 (2023), no. 1–2, 673–712.

[GP] Y. Giga and N. Požár, Motion by crystalline-like mean curvature: a survey, *Bull. Math. Sci.* 12 (2022), 2230004–1–68.

[I] 石井 仁司, 非線形偏微分方程式の粘性解について，数学 46 (1994), no. 2, 144–157.

[KF] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rend. Sem.*

Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243–260.

[Kod] K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory). *Ann. of Math. (2)* 50 (1949), 587–665.

[KoN] 小池 直之, 平均曲率流 –部分多様体の時間発展–, 共立出版 2019.

[Ko] 小池 茂昭, 粘性解： 比較原理を中心に, 共立講座 数学の輝き, 共立出版 2016.

[Koz] H. Kozono, L^1-solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains. *Math. Ann.* 312 (1998), no. 2, 319–340.

[KSY] 小薗 英雄, 清水 扇丈, 柳澤 卓, 3 次元 L^r-ベクトル場に対する Helmholtz-Weyl 分解, 数学 75 (1) (2023), 1–30.

[Lu] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Modern Birkhäuser Classics. *Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel,* 1995.

[MM] Y. Maekawa and H. Miura, Remark on the Helmholtz decomposition in domains with noncompact boundary. *Math. Ann.* 359 (2014), no. 3–4, 1077–1095.

[MMP] Y. Maekawa, H. Miura and C. Prange, Estimates for the Navier-Stokes equations in the half-space for nonlocalized data. *Anal. PDE* 13 (2020), no. 4, 945–1010.

[Ma1] 増田 久弥, 連続函数空間における高階楕円型作用素の解析的半群の生成, 偏微分方程式堅田シンポジウム報告集, 数学振興会セミナー報告集 15, pp. 144–149. 数学振興会, 東京, 1973.

[Ma2] 増田 久弥, 発展方程式, 紀伊國屋数学叢書 6, 1975.

[M] G. Mercier, Mean curvature flow with obstacles: a viscosity approach. `https://arxiv.org/abs/1409.7657`

[Mi] T. Miyakawa, The Helmholtz decomposition of vector fields in some unbounded domains. *Math. J. Toyama Univ.* 17 (1994), 115–149.

[OTG] T. Ohtsuka, Y.-H. R. Tsai and Y. Giga, Growth rate of crystal surfaces with several dislocation centers. *Cryst. Growth Des.* 18 (2018), 1917–1929

[Ou] E. M. Ouhabaz, Analysis of heat equations on domains. London Mathematical Society Monographs Series, 31. *Princeton University Press, Princeton, NJ,* 2005.

[Sa] 澤野 嘉宏, ベゾフ空間論, 日本評論社, 2011.
英語版 : Y. Sawano, Theory of Besov spaces. Developments in Mathematics, 56. *Springer, Singapore,* 2018.

[Sh] 柴田 良弘, 流体数学の基礎 上・下, 岩波数学叢書, 2022.

[Sol1] V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations. *Journal of Soviet Mathematics* 8 (1977), 467–529.

[SZ] P. Sternberg and W. P. Ziemer, Generalized motion by curvature with a Dirichlet condition. *J. Differential Equations* 114 (1994), 580–600.

[Tai] K. Taira, Semigroups, boundary value problems and Markov processes. Springer Monographs in Mathematics. *Springer-Verlag, Berlin,* 2004.

[Ta] 田辺 広域, 関数解析 下, 実教出版, 1981.

[To] Y. Tonegawa, Brakke's mean curvature flow. An introduction. SpringerBriefs in Mathematics. *Springer, Singapore,* 2019.