ディリクレ形式と対称マルコフ過程

福島正俊

2023 年 9 月 16 日

アブストラクト

§1. ディリクレ形式とマルコフ半群.　§2. 正則ディリクレ形式と対称ハント過程.
§3. road map and speed.　§4, ディリクレ形式の準正則性と正則性.
§5. 基礎空間 E の異なる３例

§1. ディリクレ形式とマルコフ半群

L^2-空間上の閉対称形式は「任意の正規縮小が働く」(即ち、関数の変動が小ならば, そのノルムも小) という極めて簡潔な公理を満たすとき、ディリクレ形式と呼ばれる。A.Beurling と J.Deny は 1959 年の論文 [BD59] でこの概念を初めて導入し、この公理は対応する L^2-空間上の対称有界線形作用素達のなす強連続半群がマルコフ性を持つことと同値であることが本質的に示された。
更にディリクレ形式の正則性の条件下で、容量概念に基づくヒルベルト空間論的なポテンシャル論を展開した。より詳しくは以下の通りである。

- $(E, \mathcal{B}(E))$ を可測空間、m をその上の σ-有限な正測度とし、
$(f,g) = \int_E f(x)g(x)m(dx),\ f,g \in L^2(E;m)$ と置く。

- $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $L^2(E;m)$ 上の対称形式であるとは、$\mathcal{F}$ が $L^2(E;m)$ の稠密線形部分空間で、$\mathcal{E}$ は　$\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ から $\mathbb{R}$ への双線形写像で $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u)$,
$\mathcal{E}(u,u) \geq 0, \forall u,v \in \mathcal{F}$, が満たされることである。

- 更に任意の $\alpha > 0$ に対して, $\mathcal{F}$ が内積 $\mathcal{E}_\alpha(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + \alpha(u,v)$ に関し、ヒルベルト空間になっているとき、$\mathcal{E}$ は閉対称形式と呼ばれる。

- $L^2(E;m)$ 上の対称線形作用素の族 $\{T_t.t > 0\}$ は

$$T_t T_s = T_{t+s},\ ||T_t f|| \leq ||f||,\ \lim_{t \downarrow 0} ||T_t f - f|| = 0,\ \forall f \in L^2,$$

　を満たすとき、強連続縮小半群と呼ばれる。ただし、$||\cdot||$ は L^2-norm.

- $L^2(E;m)$ 上の閉対称形式と強連続縮小半群とは、以下の関係により 1 対 1 に対応する；

$$\mathcal{E}(f,g)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(f-T_tf,g),\quad \mathcal{F}=\{f\in L^2(E;m);\mathcal{E}(f,f)<\infty\} \tag{1}$$

- $L^2(E;m)$ 上の有界線形作用素 S がマルコフ的であるとは，$f\in L^2(E;m)$, $0\le f\le 1\ [m]$ ならば、$0\le Sf\le 1\ [m]$ が満たされることである。

- 実関数 $\varphi=\varphi(t),\ t\in\mathbb{R}$, が正規縮小であるとは、$\varphi(0)=0,\ |\varphi(t)-\varphi(s)|\le|t-s|,\ \forall t,s\in\mathbb{R}$, が成り立つことである。

定理 1 (A.Beurling-J.Deny [BD59]) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の閉対称形式、$\{T_t,t>0\}$ をそれに (1) によって対応する強連続縮小半群とする。この時
任意の $t>0$ に対して、T_t がマルコフ的であるための必要十分条件は、次の意味で、任意の正規縮小が $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 上に働くことである：
任意の正規縮小 φ と、任意の $u\in\mathcal{F}$ に対して、$v=\varphi(u)\in\mathcal{F},\ \mathcal{E}(v,v)\le\mathcal{E}(u,u)$.

任意の正規縮小がその上に働く $L^2(E;m)$ 上の閉対称形式をディリクレ形式と言う。

§2. 正則ディリクレ形式と対称ハント過程

正則ディリクレ形式に対するポテンシャル論 ([BD59], [DL53-54], [D70])

E: 局所コンパクト可分距離空間
m: 正のラドン測度（コンパクト集合上で有限なボレル測度） with $\mathrm{supp}(m)=E$

- $L^2(E;m)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は、$\mathcal{F}\cap C_c(E)$ が $(\mathcal{F},\mathcal{E}_1)$ 内、及び $C_c(E)$ 内 (with uniform norm) で稠密なとき、正則とよばる。

- 開集合 $A\subset E$ の容量 $\mathrm{Cap}(A)$ を
、$\mathrm{Cap}(A)=\inf\{\mathcal{E}_1(u,u):u\in\mathcal{F},u\ge 1\ m-\text{a.e. on }A\}$

  で定義し、外容量が零の集合を概極集合 (almost polar set) と呼ぶ。

  概極集合の m-測度は零である。

  'quasi everywhere (q.e.)' は '概極集合を除いて' を意味する。

- E 上の関数 u が準連続とは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\mathrm{Cap}(A)<\varepsilon$ なる開集合 A が存在して、$u\big|_{E\setminus A}$ が連続になることである。

  $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が正則ならば、

- 任意の $u\in\mathcal{F}$ はその準連続な m-修正を持つ。

- $u_n,u\in\mathcal{F}$, u_n は準連続。$||u_n-u||_{\mathcal{E}_1}\to 0$, ならば、適当な部分列 $\{n_k\}$ があって、u_{n_k} は u の準連続修正に q.e. に収束する。

標準マルコフ過程とハント過程

E を Lusin 空間（あるコンパクト距離空間のボレル部分集合と同相な位相空間）とする。 E に extra point ∂ を適当に付加する。

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{G}_t, X_t(\omega), \zeta(\omega), \mathbb{P}_x)$ は、以下の 3 条件を満たすとき E 上のマルコフ過程と呼ばれる。

- $\{\mathcal{G}_t\}$ は標本空間 Ω の部分集合の成す σ 加法族で、t に関し増大。
  $X_t(\omega) \in E,\ t \in [0, \zeta(\omega)),\ X_t(\omega) = \partial,\ t \geq \zeta(\omega),\ X_t(\omega) \in \mathcal{G}_t/\mathcal{B}(E \cup \partial)$
- $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1, \quad x \in E$
- $(**)\ \ \mathbb{P}_x(X_{t+s} \in B/\mathcal{G}_t) = \mathbb{P}_{X_t}(X_s \in B), \quad \mathbb{P}_x\text{−a.s.} \quad B \in \mathcal{B}(E)$

$P_t(x, B) = \mathbb{P}_x(X_{\in} B)$ を、マルコフ過程 $\mathbb{M}$ の推移関数という。
$\mathbb{M}$ が E 上の測度 m に関して対称であるとは

$$\int_E P_t f(x) g(x) m(dx) = \int_E f(x) P_t g(x) m(dx), \quad \forall f, g \in \mathcal{B}_+(E)$$

が満たされることである。このとき、 $T_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y),\ x \in E,$ は $L^2(E; m)$ 上のマルコフ的縮小半群となる。

E 上のマルコフ過程 $\mathbb{M}$ は、次の 2 条件を満たすとき、
標準マルコフ過程（ハント過程）と呼ばれる；

- 強マルコフ性を持つ：即ち、マルコフ性 $(**)$ が、t を $\mathcal{G}_t$-停止時刻と呼ばれるランダム時刻に置き換えても満たされる。
- 標本路 $X_t(\omega)$ は $t \in [0, \infty)$ に関して、右連続であり、$t \in (0, \zeta(\omega))$ に関して $(t \in (0, \infty)$ に関して$)$ 左極限を持つ。又、$(0, \zeta(\omega))$ 上で $((0, \infty)$ 上で$)$ 準左連続である。

$[0, \zeta)$ 上で連続な標本路を持つ標準マルコフ過程は、拡散過程と呼ばれる。

標準マルコフ過程 $\mathbb{M}$ に関し、$N \in \mathcal{B}(E)$ が適切除外集合であるとは

$$m(N) = 0, \quad \mathbb{P}_x(X_t,\ X_{t-} \in E \setminus N,\ \forall t \in [0, \zeta)) = 1,\ \forall x \in E \setminus N.$$

定理 2 ([F71a],[F71b],[S73],[F73],[F75])
$(E.m.\mathcal{E}.\mathcal{F})$ を正則ディリクレ形式とする。
(i) 以下の意味でそれに適合する E 上の m-対称ハント過程 $\mathbb{M}$ が存在する；

任意の $f \in \mathcal{B}(E) \cap L^2(E; m)$ に対して、$P_t f$ は $T_t f$ の準連続修正である。

(ii) (一意性) $\mathbb{M}_1,\ \mathbb{M}_2$ が共に適合すれば、両者に共通の適切除外集合 N が存在して、 $\mathbb{M}_1\big|_{E\setminus N} \sim \mathbb{M}_2\big|_{E\setminus N}$

§3. road map and speed

$L^2(E;m)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に定理 2 の意味で適合する m-対称ハント過程 $\mathbb{M}$ を、その正値連続加法汎関数 A_t によって時間変更 (speed change) することは、0 次ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ (road map) を不変に保ちながら、対称化測度 m を A_t の Revuz 測度に置き換えることに相当する。 私は 1 次元拡散過程の研究 ([IM65, Chap.5]) からの類推で、この予想を [F71b] で述べたが、それに呼応して、M.L. Silverstein [S74] が、ディリクレ形式 $(E,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ の拡張ディリクレ空間 $(\mathcal{F}_e,\mathcal{E})$ なる概念を以下のように導入した。

E 上の m 可測関数 f で $|f|<\infty$ $[m]$, $\exists\mathcal{E}$-Cauchy sequence $\{f_n, n\geq 1\}\subset\mathcal{F}$ with $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $[m]$ なるものの m 同値類の全体を $\mathcal{F}_e$ と置く。このとき、$f\in\mathcal{F}_e$ に対しては、$\mathcal{E}(f,f)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(f_n.f_n)$ が近似列 $\{f_n\}$ の取り方に無関係に定まる。

$(\mathcal{F}_e,\mathcal{E})$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の拡張ディリクレ空間と呼ぶ。次の関係が成立する。

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_e\cap L^2(E;m).$$

実は $(\mathcal{F}_e,\mathcal{E})$ が上述の時間変更に関して不変である。

拡張ディリクレ空間の時間変更に関する不変性

$(E,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ を正則ディリクレ形式とする。$(E,\mathcal{B}(E))$ 上の正測度 μ は、概極集合上では零で、適当な閉集合 F_n の増大列で、任意のコンパクト集合 K に対して $K\setminus F_n$ の容量が零に収束し、各 n に対して $\mu(F_n)<\infty$ を満たすようなものが存在するとき、滑らかな測度と呼ばれる。

概極集合上で零である正のラドン測度は滑らかである。

滑らかな測度の全体を S で表わし、$\overset{\circ}{S}=\{\mu\in S:\mathrm{supp}(\mu)=E\}$ と置く。
例えば、$\mu(dx)=g(x)m(dx),\ g\in\mathcal{B}_b^+(E)$, は $\overset{\circ}{S}$ に属す。

$\mathbb{M}=(\Omega,\mathcal{G}_t,X_t(\omega),\zeta(\omega),\mathbb{P}_x)$ を正則ディリクレ形式 $(E,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に適合する m-対称ハント過程とする。
関数 $A_t(\omega):(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega\mapsto[-\infty,\infty]$
は、以下の性質を持つとき $\mathbb{M}$ の狭義加法汎関数 (additive functional(AF) in the strict sense) と呼ばれる：

- $A_t(\cdot)$ は $\mathcal{G}_t$-可測
- $A_0=0,\ |A_t|<\infty,\ \forall t\in[0,\zeta),\ A_t$ は $t\in[0,\zeta)$ に関し、右連続で左極限を持つ, $A_t=A_\zeta,\ t\geq\zeta$ a.s.
- $A_{t+s}(\omega)=A_t(\omega)+A_s(\theta_t\omega),\qquad \forall t,s\geq 0$ a.s.

単に $A_t(\omega)$ が $\mathbb{M}$ の加法汎関数と呼ばれるのは、$\mathbb{M}$ の適当な適切除外集合 N があって, $A_t(\omega)$ がハント過程 $\mathbb{M}\big|_{E\setminus N}$ の狭義加法汎関数のときである。

$$A_t(\omega)=\int_0^{t\wedge\zeta} g(X_s(\omega))ds,\ g\in\mathcal{B}_b(E),\quad A_t(\omega)=u(X_t(\omega))-u(X_0(\omega)),\ u\in C_b(E)$$

は、$\mathbb{M}$ の加法汎関数の典型例である。

$\mathbb{M}$ の正値連続加法汎関数 (PCAF) の全体を $\mathcal{A}_c^+$ と記す。
S と $\mathcal{A}_c^+$ は次の (Revuz) 対応で 1 対 1 に対応する；任意の $f \in \mathcal{B}_+(E)$ に対し

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbb{E}_m\left[\int_0^t f(X_s)dA_s\right],\ \mu \in S,\ A_t \in \mathcal{A}_c^+.$$

このとき μ は A_t の Revuz 測度と呼ばれる。Revuz 測度 $\mu \in \overset{\circ}{S}$ に対応する PCAF A_t は t に関して狭義増大である。

任意の $\mu \in \overset{\circ}{S}$ に対し、それを Revuz 測度に持つ PCAF を A_t とし、

$$\check{\mathbb{M}} = (\check{X}_t(\omega), \check{\zeta}(\omega), \mathbb{P}_x) \text{ where } \check{X}_t(\omega) = X_{A_t(\omega)^{-1}}(\omega),\ \check{\zeta}(\omega) = A_{\zeta(\omega)-}(\omega)$$

と置く。 $\check{\mathbb{M}}$ は、$\mathbb{M}$ の A_t による時間変更過程と呼ばれる。

定理 3 ([CF12])

(i) $\check{\mathbb{M}}$ は E 上の μ-対称ハント過程である、

(ii) $(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ を $\check{\mathbb{M}}$ の $L^2(E;\mu)$ 上のディリクレ形式とすると、$(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ は正則である。

(iii) $(\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{F}})$ の拡張ディリクレ空間を $(\check{\mathcal{F}}_e, \check{\mathcal{E}})$ とすると、$(\check{\mathcal{F}}_e, \check{\mathcal{E}}) = (\mathcal{F}_e, \mathcal{E})$.

従って特に $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_e \cap L^2(E;\mu), \quad \mu \in \overset{\circ}{S},$

road map $\mathcal{E}$ on $\mathcal{F}_e$ の確率論的表示

$(E, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を正則ディリクレ形式とし、$\mathbb{M}$ をそれに適合する対称ハント過程とする。 $f \in \mathcal{F}_e$ の台は、測度 $f \cdot m$ の台として定義する。

台が共通部分を持たない $f, g \in \mathcal{F}_e$ に対しては $\mathcal{E}(f,g) = 0$ が成り立つとき、$\mathcal{E}$ は局所的と呼ばれる。

$f \in \mathcal{F}_e$ の台がコンパクトで、$g \in \mathcal{F}_e$ が f の台の近傍で定数なら、$\mathcal{E}(f,g) = 0$ が成り立つとき、$\mathcal{E}$ は強局所的と呼ばれる。

定理 4 ([FT08], [FOT11], [CF12]) (I) $u, v \in \mathcal{F}_e$ に対して、

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}^{(c)}(u,v)\\ +\ \ &\frac{1}{2}\int_{E\times E\setminus d}(\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y))(\widetilde{v}(x)-\widetilde{v}(y))J(dx,dy) + \int_E \widetilde{u}(x)\widetilde{v}(x)\kappa(dx).,\end{aligned}$$

ここに、$\mathcal{E}^{(c)}$ は強局所的な対称形式、J は $E \times E \setminus d$ 上の対称ラドン測度、
κ は E 上のラドン測度。

(II) $J(dx,dy) = N(x,dy)\mu_H(dx), \quad \kappa(dx) = N(x,\{\partial\})\mu_H(dx)$.
ここに、$(N(x,dy), H)$ はハント過程 $\mathbb{M}$ の *Lévy system* ([W64]) であり、
μ_H は *PCAF* H の *Revuz* 測度.

(III) $\mathcal{E}$ が局所的であるための必要十分条件は、$\mathbb{M}$ が拡散過程であることである。
$\mathcal{E}$ が強局所的であるための必要十分条件は、$\mathbb{M}$ が拡散過程であって、E 内で消滅しないことである。

解析的表示 (I) は Beurling-Deny[BD59] の公式として、知られている。

$\mathbb{M}$ の AF A_t のエネルギーを $e(A) = \lim_{t\downarrow} \frac{1}{t}\mathbb{E}_m[A_t^2]$ によって定義する。

$u \in \mathcal{F}_e$ に対して、$A_t^{[u]} = \widetilde{u}(X_t) - \widetilde{u}(X_0)$ はエネルギー有限な AF である。

$\mathbb{E}_x[M_t^2] < \infty,\ \mathbb{E}_x[M_t] = 0\quad \text{for q.e. } x \in E,$ を満たす AF M_t は、martingale AF(MAF) と呼ばれる。

$\mathcal{M} = \{M : MAF\}, \qquad \overset{\circ}{\mathcal{M}} = \{M \in \mathcal{M} : e(M) < \infty\}$

$\mathcal{N}_c = \{N :\ \text{continuous AF},\ \mathbb{E}_x[|N_t|] < \infty,\ \text{q.e. } x,\ e(N) = 0\}$

と置く。$\mathcal{N}_c$ に属す AF の２次変分は零であるが、有界変動とは限らない。

$M \in \mathcal{M}$ に対しては、$\mathbb{E}_x[\langle M\rangle_t] = \mathbb{E}_x[M_t^2]$ を満たす $\langle M\rangle \in \mathcal{A}_c^+$ が一意に存在し、M の可予測２次変分と呼ばれ、等式 $e(M) = \frac{1}{2}\mu_{\langle M\rangle}(E)$ が成立する。

福島分解 [F79]：

$$\forall u \in \mathcal{F}_e, \quad \exists_1\ M^{[u]} \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}, \quad \exists_1\ N^{[u]} \in \mathcal{N}_c, \quad A^{[u]} = M^{[u]} + N^{[u]}.$$

[FT08], [FOT11] では更に、$M^{[u]}$ の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する直交分解

$$M^{[u]} = M^{[u].c} + M^{[u],j} + M^{[u],k}, \quad M_t^{[u],c} \text{ is continuous}$$

を行い、右辺の各項のエネルギーを、等式

$$\langle M^{[u],j}\rangle = \int_0^t \int_E (\widetilde{u}(X_s) - \widetilde{u}(y))^2 N(X_s, dy)dH_s,\ \langle M^{[u],k}\rangle_t = \int_0^t \widetilde{u}(X_s)^2 N(X_s, \{\partial\})dH_s$$

を用いて求めることにより、定理の (I), (II) を得る。

(III) は、既に [F80] で示されていたが、[CF12] では定理の (I), (II) の直接帰結として得られている。

§4. ディリクレ形式の準正則性と正則性

ディリクレ形式 $(E, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ の正則性はハント過程と呼ばれる強マルコフ過程が対応するための十分条件ではあるが、必要条件ではない。　又、基礎空間 E に対する局所コンパクト性の仮定は、無限次元的な対象の扱いを排除している。

これに関連して、1991 年に S.Albeverio-Z.M.Ma[AM91] は以下に述べる準正則ディリクレ形式なる重要な概念を導入し、Z.M.Ma-M.Roeckner[MR92] でそれは更に詳しく調べられた。

E を一般のハウスドルフ位相空間、m を E 上の σ-加法的な正測度で $\text{supp}(m) = E$ なるもの、$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(E; m)$ 上のディリクレ形式とする。

閉集合 $F \subset E$ に対して、$\mathcal{F}_F = \{u \in \mathcal{F} : u = 0\ m\text{-a.e. on } E \setminus F\}$ と置く。
閉集合の増大列 $\{F_k\}$ は、$\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{F}_{F_k}$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の稠密部分集合のとき、$\mathcal{E}$-nest と呼ば

れる。
ある $\mathcal{E}$-nest $\{F_k\}$ があって $N \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}(E \setminus F_k)$ が成り立つとき、N は $\mathcal{E}$-極集合と呼ばれる。 $\mathcal{E}$-q.e. は、'$\mathcal{E}$-極集合を除いて' を意味する。
E 上の関数 u は、ある $\mathcal{E}$-nest $\{F_k\}$ があって、$u\big|_{F_k}$ が任意の k に対して、連続となるとき、$\mathcal{E}$-準連続と呼ばれる。

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は、次の 3 条件を満たすとき準正則と呼ばれる：

(i) コンパクト集合から成る $\mathcal{E}$-nest が存在する。
(ii) $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1)$ の稠密部分集合 $\mathcal{F}_0$ があって、任意の $f \in \mathcal{F}_0$ は $\mathcal{E}$-準連続な m-修正を持つ。
(iii) $\{f_k, k \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ と $\mathcal{E}$-極集合 N があって、各 f_k は $\mathcal{E}$-準連続な m-修正 $\widetilde{f_k}$ を持ち、$\{\widetilde{f_k}\}$ は $E \setminus N$ の点を分離する。

$(E, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が正則ディリクレ形式ならば、それは準正則であり、又、$\mathcal{E}$-極性、$\mathcal{E}$-準連続性は、§2 で容量を用いて定義された概極性、準連続性と其々同義となる。

ここで、準正則ディリクレ形式に関する 3 主要定理を、[CF12, Chap.1] に定式化されている形で述べよう。

定理 5 ([AM91],[Fi01]) E を *Lusin* 空間、m をその上の σ-有限な測度で $\mathrm{supp}(m) = E$ を満たすもの、$\mathbb{M}$ を E 上の m-対称な右過程 *(*右連続な標本路を持つ強マルコフ過程*)* とする。このとき、$\mathbb{M}$ の $L^2(E:m)$ 上のディリクレ形式は準正則で、$\mathbb{M}$ はそれに適合している。

定理 6 ([CMR94]) $(E, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ が準正則ディリクレ形式ならば、適当な正則ディリクレ形式 $(\widehat{E}, \widehat{m}, \widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{F}})$ と、E から $\widehat{E}$ への準位相同型写像 j が存在して、$\widehat{m} = m \circ j^{-1}$ であり、$L^2(\widehat{E}; \widehat{m})$ 上の $(\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{F}})$ は $L^2(E; m)$ 上の $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の j による像ディリクレ形式となる。

定理 7 任意の準正則ディリクレ形式 $(E, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対しては、適当な *Borel* $\mathcal{E}$-極集合 $N \subset E$ と、$E \setminus N$ 上の m-対称で *special* な *Borel* 標準マルコフ過程 $\mathbb{M}$ が存在して、$\mathbb{M}$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に適合している。

定理 7 は、定理 2 と 定理 6 の帰結として得られる。
定理 2, 定理 4, 5, 6, 7 の非対称なディリクレ形式への拡張は可能であるが、定理 3 は、対称性固有に完結した主張である。

§5. 基礎空間 E の異なる３例

基礎空間 E が著しく異なるが、上述の諸定理が応用されて、現在盛んに研究されている 3 例を挙げる。

1, フラクタル集合

E が Siepinski gasket や Sierpinski carpet などのような $\mathbb{R}^n$ の自己相似的部分集合の場合で、微分構造を持たない。 E 上の Hausdorff 測度 m に対して、$L^2(E; m)$ 上の

強局所的正則ディリクレ形式が自然に定義できる ([FS92])。 定理 2, 4 により対応する E 上の拡散過程 $\mathbb{M}$ はブラウン運動と呼ばれる。 $\mathbb{M}$ の MAF の空間 $\mathcal{M}$ の次元が 1 という著しい特徴を持つ。

2. 配置空間

$\Gamma = \{\gamma = \sum_i \delta_{x_i} :\ \gamma(K) < \infty,\ \forall \text{compact } K \subset \mathbb{R}^n\}$
Γ は漠収束位相で Polish 従って Lusin 空間である。 μ を Γ 上の 準 Gibbs 測度とし、$L^2(\Gamma,\mu)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を、μ と密接に関係させて導入すると、それが強局所的で準正則であることが示される。定理 4, 7 によりそれに対応する Γ 上の拡散過程は、μ を不変測度とするアンラベルな無限粒子系の干渉運動を表す。

3. 多重連結平面領域の商位相空間

平面領域 G は、$\mathbb{C}$ に等しいか、$\mathbb{C}\setminus G$ が連続体であるとし、
$D = G\setminus K,\quad K = \bigcup_{i=1}^N A_i$ を $(N+1)$-連結領域、即ち A_i は G に含まれる互いに交わらないコンパクト連続体とする。　更に
$D^* = D\cup K^*,\quad K^* = \{a_i^* : 1\le i\le N\}$ を G から各 A_i を 1 点 a_i^* と見做して得られる商位相空間とする。又
D 上のルベーグ測度を m とし、$m(a_i^*) = 0,\ 1\le i\le n,$ と置いて D^* に拡張する。

D^* 上の m-対称拡散過程で、K^* 上では消滅せず、その D 上の部分過程が D 上の吸収壁ブラウン運動 (ABM) と同法則であるものを、D^* 上の 'かがりブラウン運動' (Brownian motion with darning (BMD)) と呼ぶ。 BMD は SLE(Schramm-Loewner evoluton) 理論を多重連結領域に拡張するために本質的な役割を果たす ([CFM23]).

[CFM23] では、BMD の存在と一意性が、次のように定義される $L^2(D^*;m)$ 上のディリクレ形式 $(\mathcal{E}^*,\mathcal{F}^*)$ を用いて示されている：
G 上の ABM に関する A_i への 1-位到達確率を $u_1^{(i)}$ とするとき、$\mathcal{F}^*$ は $H_0^1(D)$ と $\{u_1^{(i)},\ 1\le i\le N\}$ の張る $H^1(D)$ 内の線形部分空間。
$\mathcal{E}^*(u,v) = \frac{1}{2}\int_D \mathrm{grad}\, u(x)\cdot \mathrm{grad}\, v(x)dx,\quad u,v\in\mathcal{F}^*.$

$(\mathcal{E}^*,\mathcal{F}^*)$ は $L^2(D^*;m)$ 上の強局所的正則ディリクレ形式で、$\mathrm{Cap}(a_i^*) > 0,\ 1\le i\le N,$ なることが示されるので、定理 2, 4 によって得られる D^* 上の拡散過程を refine して BMD が構成できる。

$\mathbb{M}$ を D^* 上の BMD とし、その $L^2(D^*;m)$ 上のディリクレ形式を、$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ とすると、定理 5 により、それは準正則だから、定理 6 による transfer method が用いられて $(\mathcal{E},\mathcal{F}) = (\mathcal{E}^*,\mathcal{F}^*)$ が得られ、$\mathbb{M}$ の一意性が示される。

References

[AM91] S. Albeverio and Z.M. Ma, Necessary and sufficient conditions for the existence of m-perfect processes associated with Dirichlet forms, *Seminaire de Probabilités* **25**, 374-406, Lecture Notes in Math, vol. 1485, Springer,1991

[B39] A. Beurling, Ensemble exceptionnels, *Acta, Math.,* **72**(1939), 1-13

[BD59] A. Beurling and J. Deny, Dirichlet spaces *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **45**(1959), 208-215

[CF12] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmeric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012

[CFM23] Z.-Q.Chen, M.Fukushima and T.Murayama, *Stochastic Komatu-Loewner Evolutions*, World Scientific, 2023

[CMR94] Z.Q. Chen, Z.M. Ma and M. Roeckner, Quasi-homeomorphisms of Dirichlet forms, *Nagoya Math.J.* **136**(1994), 1-15

[D70] J. Deny, Méthodes Hilbertiennes en théorie du potentiel, *Potential Theory*, Centro Internazionale Matematico Estivo, Edizioni Cremonese, pp 121-201, 1970

[DL53-54] J.Deny and J.L.Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann.Inst.Fourier,* **5**(1953/54), 305-370

[Do62] J.L.Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann.Inst.Fourier,* **12**(1962), 573-621

[Dou31] J.Douglas, Solution of the problem of Plateau, *Trans.Amer.Math.Soc.,* **33**(1931), 263-321

[Fe57] W, Feller, On boundary and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, *Ann.Math.,* **65**(1957), 527-576

[Fe58] W. Feller, Some new connections between probability and classical analysis, One hour address at ICM Edinburgh, 1958

[Fi01] P.J. Fitzsimmons, On the quasi-regularity of semi-Dirichlet forms, *Potential Analysis,* **15**(2001), 151-185

[F64] M. Fukushima, On Feller's kernel and the Dirichlet norm, *Nagoya Math.J.,***24**(1964), 167-175

[F69] M. Fukushima, On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities, *J.Math.Soc.Japan* **21**(1969), 58-93

[F71a] M.Fukushima, Regular representations of Dirichlet spaces, *Trans,Amer,Math.Soc.,***155**(1971), 455-473

[F71b] M.Fukushima, Dirichlet spaces and strong Markov processes, *Trans,Amer,Math.Soc.,***162**(1971), 185-224

[F73] M. Fukushima, On the generation of Markov processes by symmetric forms, in *Proceedings of the second Japan USSR Symposium on Probability Theory,* (Kyoto 1972), 46-79, Lecture Notes in Math., **330**, Springer, Berlin, 1973

[F75] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes* (in Japanese), Kinokuniya Co. Ltd., 1975

[F79] M. Fukushima, A decomposition of additive functionals of finite energy, *Nagoya Math. J.,* **74**(1979), 137-168

[F80] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North Holland, Amsterdom-New York/ Kodansha, Tokyo, 1980

[FOT11] M. Fukushima, Y. Oshima and M.Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter, Berlin,1994
Second revised and extended editions, de Gruyter, Berlin, 2011

[FS92] M. Fukushima and T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, *Potential Analysis,* **1**(1992), 1-35

[FT08] M.Fukushima and M.Takeda, *Markov Processes* (in Japanese). Baifukan Pub.Co.Ltd., 2008

[FTana05] M. Fukushima and H. Tanaka, Poisson point processes attached to symmetric diffusions, *Ann.Inst. Henri-Poincaré Probab. Stat.,* **41**(2005), 419-459

[H57-58] G.A. Hunt, Markoff process and potential, *Illinois J. Math.,* **I**(1957), 44-93; **I**(1957), 316-369; **II**(1958), 151-213

[IM65] K. Itô and H.P. McKean,Jr., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer, 1965, Springer's Classics in Mathmatics Series, 1996

[MR92] Z. M. Ma and M.Roeckner, *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Springer, 1992

[R59] D. Ray, Resolvents, transition functions, and strong Markov processes, *Ann.Math.* **70**(1959), 41-72

[S73] M.L.Silverstein, Dirichlet spaces and random time change, *Illinois J.Math.,***17**(1973), 1-72

[S74] M.L. Silverstein, *Symmetric Markov Processes*, Lecture Notes in Math. **426**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974

[W64] S. Watanabe, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov processes, *Japanese J. Math.,***34**(1964), 53-70