代数多様体上の有理曲線

森　重文　(京都大学 高等研究院)*

1. はじめに

本講演では受賞対象となった研究を振り返りたい。代数幾何学、特に極小モデルプログラムは過去40年ほどの間に大きな発展を遂げ、非常に一般化されている。最新の用語には拘らず入門的なレベルで、当時の思い出とともにその雰囲気を伝えたい。

1.1. 用語と記号

簡単のため、特に断らない限り**代数多様体**は複素数体上定義されたアフィン空間または射影空間に埋め込まれたものとして話を進める。複素数体以外の体の話をする場合はその都度断ることにする。

代数多様体の間の**有理写像** $f : X \dashrightarrow Y$ とは $f(x)$ の Y 座標が x の有理関数であり X の稠密な開集合 U の上で正則写像となるものである。特に $U = X$ の時、f は**正則写像**または**射**という。f が**双有理写像**とは、X, Y 各々の稠密な開集合 U, V があって f が同型写像 $f_U : U \simeq V$ を定めることとする。これは有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ と $\mathbb{C}(Y)$ の間の $\mathbb{C}$ 上の同型があるというのと同じ事であり、X と Y は**双有理同値** $(X \sim Y)$ という。

射影的代数多様体 X 上に Cartier 因子 D と曲線 C が与えられた時、**交点数** $(D \cdot C) \in \mathbb{Z}$ が定まる。D が $\mathbb{Q}$**Cariter**、つまりある自然数倍が Cartier であれば交点数 $(D \cdot C) \in \mathbb{Q}$ が同様に定義される。どのような曲線に対しても $(D \cdot C) \geq 0$ の時、D は**非負**であるという。X の任意の因子が $\mathbb{Q}$Cartier であるとき、X は $\mathbb{Q}$ **分解的**であるという。

少なくとも非特異な n 次元代数多様体 X については標準可逆層 $\mathscr{O}_X(K_X)$ が次のように定義される。各点 x の局所環 $\mathscr{O}_{X,x}$ は正則局所環なので正則パラメータ系 $z_1, \ldots, z_n$ (解析座標系と思っても構わない) を用いて $\mathscr{O}_X dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ が貼り合って標準可逆層 $\mathscr{O}_X(K_X)$、つまり標準因子 (類) K_X が定まる。

射影多様体 X の $-K_X$ が豊富なら X を Fano 多様体、K_X が豊富なら標準偏極多様体という。

2. 背景

私が数学の研究を始めたのは1973年の京都大学理学研究科数学の修士課程に入った頃だ。特に今の研究に関連した立場で振り返ると、代数多様体の双有理分類論と Fano 多様体の分類の2つが中心となって、私の興味が発展してきた。

2.1. 代数多様体の双有理分類論

非特異複素射影多様体 X は1次元、即ち曲線の場合にはリーマン面と呼ばれる。リーマン面の絵を描くと、図1、図2、図3の形を取る。

本研究は京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業と科研費 (課題番号:JP25287005) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14E30, 14E05
キーワード：terminal singularity, extremal ray
* 〒606-8501 京都市左京区吉田牛ノ宮町 京都大学高等研究院
e-mail: mori@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: https://kuias.kyoto-u.ac.jp/j/profile/mori

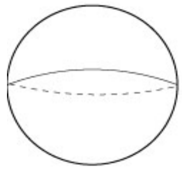

図 1: 種数0

図 2: 種数1

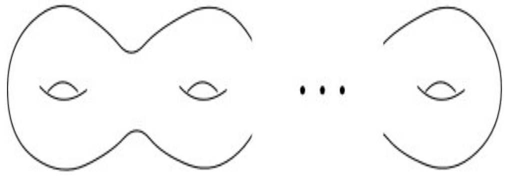

図 3: 種数 >1

ここで、ハンドルの数を種数と呼ぶ。種数 g の値が $0,\ 1,\ >1$ に応じて、普遍被覆面がリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$、ガウス平面 $\mathbb{C}^1$、単位円板 $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ となり、３つの異なる幾何学を提供する。

代数幾何の立場で重要なのは、標準因子 K_X の次数が $2g-2$ となることである。リーマン面を分類することは非特異射影代数曲線、即ち複素数体上の代数函数体の分類と同値になり、表1のように纏められる。

種数	0	1	>1
標準因子	$K_X < 0$	$K_X = 0$	$K_X > 0$
普遍被覆	リーマン球面 $\mathbb{CP}^1$	ガウス平面 $\mathbb{C}^1$	単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \|\ \|z\| < 1\}$

表 1: 代数曲線の分類表

2次元、つまり曲面の場合も、これらの幾何の違いに基づいた分類がなされる。

2.1.1. 曲面の点の爆発、(-1) 曲線の爆縮

非特異射影的曲面 X が与えられた時、X の１点 x の爆発という非特異射影代数曲面が作り出せる。それは点 x を除去し、代わりに (-1) 曲線と呼ばれる射影直線 $C = \mathbb{CP}^1$ を x の代わりに挿入した曲面 $Bl_x(X)$ である。逆に爆発 $Bl_x(X)$ からみると、爆縮射 $Bl_x : Bl_x(X) \to X$ が構成され (図 4)、$Bl_x : Bl_x(X) \setminus C \simeq X \setminus \{x\}$。

爆発の操作で異なる代数多様体が簡単に作り出せるが、函数体 $\mathbb{Q}(X)$ 自体は変わらない。これが2次元 (以上) で出くわす双有理幾何であり、曲線の場合のように標準因子の正負を議論しても、直接に双有理分類の議論にはならない。因みに、非特異射影曲面の間の任意の双有理正則写像 $Y \to X$ は有限個の爆縮写像の合成として得られる。従って、細かな違いを無視し2次元の代数函数体を分類しようとすると、非特異代数曲面 X から始めて、爆縮を繰り返してそれ以上爆縮できない「小さな」代数曲面を対象とすることも考えられる。その方針で双有理幾何の対処に成功したのがイタリア学派であった。実際、任意の非特異射影曲面から始めて、(-1) 曲線を見つける毎に爆縮で潰すと、(-1) 曲線を持たない射影曲面 $\overline{X}$ が得られる。この $\overline{X}$ は、標準因子 $K_{\overline{X}}$ が非負となるか、さもなければ、代数曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束、あるいは射影平面 $\mathbb{P}^2$ に同型になる。後者２つを後の話と合わせるために、次のように表示しておこう。

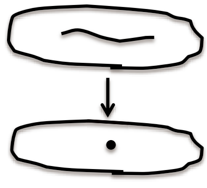

図 4: 点 x の爆発

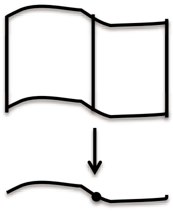

図 5: $\mathbb{P}^1$-束

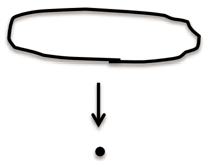

図 6: $\mathbb{P}^2$

2.1.2. 双有理不変量

X は n 次元非特異射影多様体とすると、任意の正整数 $i > 0$ に対して、多重種数 $P_i(X) := \dim H^0(X, iK_X)$ は X の双有理不変量であるという著しい性質を持つ。さらに言えば、非特異射影多様体 X, Y の間に双有理写像が存在すると、それは自然な同型 $H^0(X, iK_X) \simeq H^0(X, iK_X)$ を定め、$P_i(X) = P_i(Y)$ が成り立つ。これにより、標準環と呼ばれる階数付き環 $R(X)$ が $R(X) = \oplus_{i\geq 0} H^0(X, \mathscr{O}_X(iK_X))$ と定義され、X の双有理不変量となる。ただし、$H^0(X, \mathscr{O}_X(iK_X))$ が $R(X)$ の次数 i 部分である。

ある正整数 $i > 0$ に対して $P_i(X) > 0$ となる時、X の小平次元 $\kappa(X)$ を $R(X)$ の商体の $\mathbb{C}$ 上の超越次数 -1 とし ($0 \leq \kappa(X) \leq \dim X$)、逆にそのような $i > 0$ がない時 $\kappa(X) = -\infty$ とする。

$\kappa(X) \geq 0$ の時、$\overline{X}$ の標準因子 $K_{\overline{X}}$ は非負となり、X の極小モデルと呼ばれる。X と Y が双有理同値の時、$\overline{X}$ と $\overline{Y}$ は同型となり、曲面の双有理幾何が極小モデルの双正則幾何に帰着される。$\kappa(X) = -\infty$ の時は既に 2.1.1 で述べたとおりである。以上が表 2 のように纏められる。

$\kappa(X)$	$-\infty$	≥ 0
$X \sim Y$ の時	$\overline{X} \simeq \overline{Y}$ とは限らない	$\overline{X} \simeq \overline{Y}$
$\overline{X}$	曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束か $\mathbb{P}^2$	$K_{\overline{X}}$ は半豊富

表 2: 代数曲面の粗い分類表

学部 3 回生の時に、広中平祐先生が京都大学に滞在され代数幾何の集中講義をなさったが、その折に、3 次元双有理射が一筋縄では扱えない例として [Hir62] を教えて頂いて、不思議な絵画として頭の中にあった。さらに修士 1 年の時に Michael Artin 氏が京都大学に滞在しておられ、代数曲面の分類論の集中講義をして下さった。当時、私を含めた出席者は日常英会話が出来ず、Artin 氏が「これでは自分が日本語を覚えないといけないな」と冗談交じりに仰ったのを覚えている。正標数の場合を含めた楕円曲面の理論は全く未知の世界で、付いていくのが精一杯だったが、代数曲面論を満喫できた。それがきっかけで上野健爾氏の [Uen74] を手に取り、小平邦彦氏の代数・解析曲面の分類論を高次元化しようとする飯高プログラムを学んだ。先に学んだ、広中先生の例が、2 次元極小モデル理論を 3 次元に一般化する困難を例示していることを改めて痛感したのもこの頃だ。

2.2. Fano 多様体の分類

1970 年代初めに単有理的で非有理的な 3 次元 Fano 多様体の例が構成されて、Fano 多様体の研究が盛んになった。大学 4 回生の時に永田雅宜先生に「新しい」3 次元有理

多様体を作れ、という問題を出されたが、色々と考えたあげく作り出した多様体が実は既知のFano多様体だと丹後弘司氏に指摘されたことを懐かしく思い出す。

私は藤田隆夫氏のΔ-種数の理論 [FujT73-74], [FujTT75] に興味を持ち、丹後氏の$\mathbb{P}^n$の特徴付け [Tan75] にも触発されて、修士２年の時に重み付き完全交叉多様体 [Mor75] を構成した。それは完全交叉でないFano多様体の例の簡明な記述を与えた。この興味はさらに繋がって、Iskovskikhの結果 [Isk77], [Isk78] に惹かれるように、私は後に端射線の理論を発展させて行った。因みに、私の結果 [Mor75] が [Isk77] で触れられている。プレプリントサーバーarXivが普及した今日なら当たり前のことだが、ベルリンの壁も存在していた当時では極めて早い。これはM. Reid氏が東西のパイプ役を果たしていた下さったからだ。

2.3. Hartshorne予想

Hartshorne予想は私の指導教員の１人であった隅広秀康氏が熱心に取り組んでいた問題だった。私が積極的に興味を持ったのは、満渕俊樹氏の学位論文 [Mab77] を読んだ時だ。それはFrankel予想を３次元の場合に解決した論文だ。

Conjecture 2.4 (Frankel予想) ([Mor79], [SiYu80]) 非特異複素ケーラー多様体Xの断面曲率が至るところで正とする。この時、Xは射影空間に双正則同値である。

微分を用いる簡単な補題[MoSu78, Lemma7] に気が付き隅広さんに共同研究をお願いし、Frankel予想の代数幾何版であるHartshorne予想を３次元の場合に解決した [MoSu78, Theorem 15]。

Conjecture 2.5 (Hartshorne予想) ([Mor79]) 非特異射影多様体Xの接ベクトル束T_Xが豊富であれば、Xは射影空間に同型である。

それまで学んでいた環論を代数幾何にやっと応用できた気がして記憶に残っている。本格的に代数幾何の論文を出版し始めたのはこの論文からだったかも知れない。非特異射影多様体Xについて、「至る所断面曲率が正$\Longrightarrow$接ベクトル束が豊富$\Longrightarrow$標準因子が豊富$\Longrightarrow$ある曲線Cに対して$(K_X \cdot C) < 0$」はよく知られている。“$(K_X \cdot C) < 0$” を念頭に置いて問題を選んだ訳ではなく、偶々興味を持った問題が後の発展に結びついた。私にとっては、Hartshorne氏がFrankel予想を代数幾何的に言い換えて、偶々満渕氏のプレプリントが目に入るという幸運が重なった。

3. 発見

3.1. 有理曲線存在定理

1977年にハーバード大学で研究を始めたが、1978年の夏休みに時間が出来て、Hartshorne予想に再挑戦した。その時に自分が証明したと思っていた、ある補題を点検していたら間違っていることに気が付いた。正則写像を変形させようとしていたが、ある操作をすると必ず有理曲線が出てくることが判り、変形が上手くいかなかったのだ。改良された形で述べると次のようになる。

Theorem 3.2 ([Mor79, Theorem 5], [MiMo86, Theorem 5]) 非特異射影多様体X上に曲線Cがあり、CがXの標準因子K_Xの交点数が負、つまり$(K_X \cdot C) < 0$とする。この時、Cの任意の点xに対して、Xはxを通る有理曲線を含む。

不思議なことに、定理3.2が判ったら1週間ほどで上述したHartshorne予想とFrankel予想を解決することが出来た[Mor79]。その証明には、あるモジュライ空間の構成を実行する必要があったのだが、それが直ぐに出来たのは、修士の時だったと思うが、丸山正樹氏に付き合って貰って、モジュライ空間の理論を勉強したことがあったからだ。

定理3.2は任意標数で成立する。標数0の場合も正標数に持ち込むことにより証明される。あたかも、曲線を変形し曲げて折る、ような議論を行うので、その一般化[MiMo86]も含めてBend-and-Breakと呼ばれている。もし正標数を用いない証明が得られれば解析的な応用が見込めるのではないかと期待している。最近、J. McKernan氏がXが弱い特異点持つ場合に一般化した[McK17, Corollary 1.2]]が、証明では依然として正標数を用いる[MiMo86]が使われている。

3.3. 端射線の理論

標準因子の“$(K_X \cdot C) < 0$”という空間の曲り方に関する性質から有理曲線の存在がわかると、射影空間であることを証明するには接ベクトル束の豊富性ほど強い仮定は必要ではなかった。それでは“$(K_X \cdot C) < 0$”の有効な帰結は何かという疑問にとりつかれた。問題が先にあり証明を考えるのが普通だが、証明の鍵から問題を見つけるようなもので、この不思議な探索は半年ほど続いた。

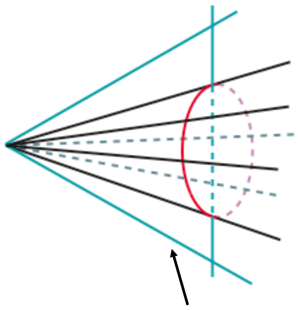

図 7: 曲線の錐

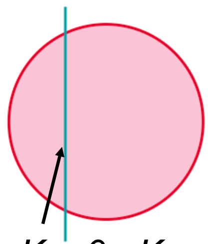

図 8: 曲線の錐の切り口

Xは非特異複素射影多様体、CはX上の曲線とする。この時、有限次元実ベクトル空間である実ホモロジー群$H_2(X,\mathbb{R})$内にホモロジー類$[C]$が定まる。曲線Cを動かした時、類$[C]$全てにより生成される凸錐を$NE(X)$とし、実ベクトル空間の位相での閉包を$\overline{NE}(X)$とする(図7)。Xの豊富因子Lは実コホモロジー群$H^2(X,\mathbb{R})$の元としてコホモロジー類$[L]$を定めるので、Lは$H_2(X,\mathbb{R})$の線形関数も定める。切断$\{L=1\}$と$\overline{NE}(X)$の切口$\overline{NE}(X)_{L=1}$は有界閉集合(図8)である(Kleimanの定理の一部)。標準因子K_Xも同様に、$H_2(X,\mathbb{R})$の線形関数を定める。したがって、$H_2(X,\mathbb{R})$は実超平面$\{K_X=0\}$により、2つの半空間$\{K_X<0\}$、$\{K_X>0\}$に切り分けられる(図8)。曲線の錐は広中先生が学位論文で扱った因子の錐の双対版でS. Kleiman氏が射影多様体の特徴付けで導入した。私が定理3.2の応用として気が付いたのは、曲線の錐の切口$\overline{NE}(X)_{L=1}$は$\{K_X<0\}$の側では、(無限個かも知れないが)離散的に存在する頂点達で張られている(図10)ということだ。曲線の錐に戻ると図9のように、それらの点は原点から伸びる稜線の超平面$\{L=1\}$による切口ということになる。この稜線をXの**端射線**と定義する。ここまでの話は、Xが非特異射影多様体であれば基礎体は正標数の代数閉

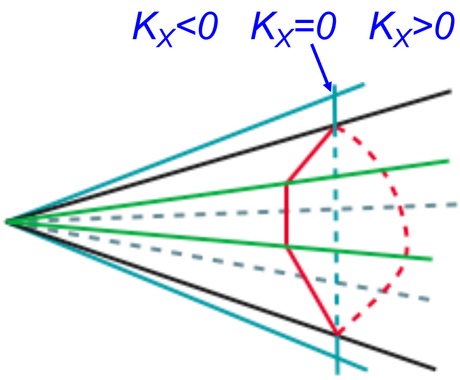

図 9: 曲線の錐

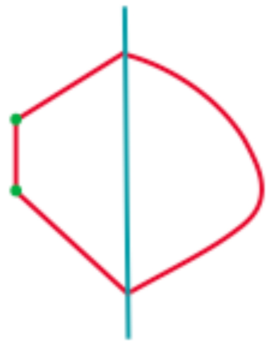

図 10: 曲線の錐の切り口

体でも成り立つが、現在でも 4 次元以上では正標数版は私の結果 [Mor82, Theorem 1.5] のみである。X の端射線 R が持つ X の幾何学的情報は、R の**収縮射**と呼ばれる (言わば、R にホモロジー類が属する曲線だけを潰す) 正則写像 $cont_R : X \to Z$ と組み合わせると判りやすい。ここで Z は正規な射影多様体で $cont_R$ は全射である。端射線 R とその収縮射 $cont_R$ の 1 対 1 対応は、X の曲線 C について、"$[C] \in R \iff cont_R(C) = 1$ point" により定まる。ただし、標数 0 の時に、(後出の端末特異点を許す) より一般な設定の下で収縮射が存在することを示しそれから端射線の定理を証明したのは川又雄二郎氏である [Kaw84a],[Kaw84b]。

3.4. 2 次元における収縮射

曲面の場合の端射線の収縮射は (-1) 曲線の爆縮 (図 11)、$\mathbb{P}^1$ 束 (図 12)、$\mathbb{P}^2$ から 1 点への写像 (図 13) の 3 通りである。これから 2 次元の極小モデルプログラムが再構成できる。X が曲面の場合には既知の結果の新証明を与えただけだが、それでも、曲面双有理分類論で曲面上に (-1) 曲線を見つける議論が極めて難解であったのが、見通しの良い証明となった。例えば、その副産物が G 曲面 (少し乱暴だが、有限群 G の作用付きの曲面 X) だ。端射線を用いて G 曲面の理論の高次元化が可能となった。

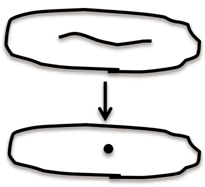

図 11: (-1) 曲線の爆縮

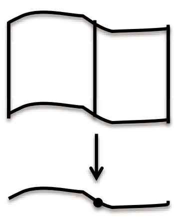

図 12: $\mathbb{P}^1$-束

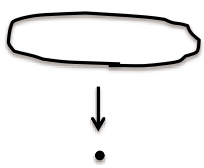

図 13: $\mathbb{P}^2$

3.5. 3 次元収縮射

3 次元の非特異射影多様体 X の端射線 R の収縮射 $cont_R : X \to Y$ で Y が 2 次元以下のものを図示すると次のようになる。

また、収縮射 $cont_R : X \to cont_R(X)$ が双有理的になるのは次の場合である。

このうち、既約因子が曲線に潰れる場合 (図 17) と点に潰れる場合 (図 18) は曲面で見た (-1) 曲線の爆縮の自然な 3 次元版であるが、$cont_R(X)$ は $\mathbb{C}^3/(-1)$ などの特異点を持つことがある。それでも標準因子は 2 倍すれば Cartier 因子となるので曲面の場合と同

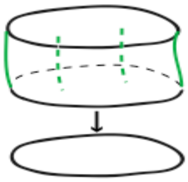

図 14: コニック束

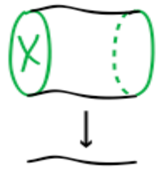

図 15: Del Pezzo 束

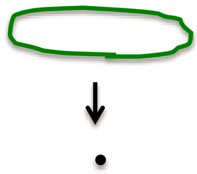

図 16: Fano 多様体

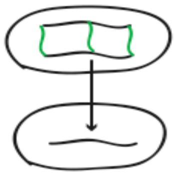

図 17: 因子-曲線収縮

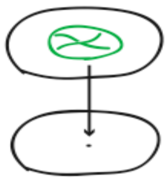

図 18: 因子-点収縮

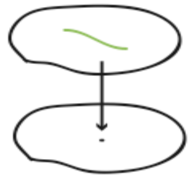

図 19: 小収縮

様に $cont_R(X)$ を研究すれることができる。従って、そのような特異点を許す理論を準備しておく必要がある。丁度 [Mor82] の前年に Reid 氏は論文 [Rei81] において、正しくそのような特異点 (端末特異点という) を導入していた (3 次元端末特異点の分類については [Rei85] を参照されたい)。そして、端末特異点を許す 3 次元射影多様体で端射線の収縮射を調べると、小収縮と呼ばれる図 19 の場合には (可約かも知れない) 曲線を点に潰す。この場合には、$cont_R(X)$ の標準因子 $K_{cont_R(X)}$ は (自然数倍しても)Cartier 因子にはならず、$K_{cont_R(X)}$ を用いて議論を続けることは出来ない。

3.5.1. フリップ

小収縮 $f = cont_R : X \to cont_R(X)$ の場合を考える。小収縮の仮定より、$cont_R(X)$ の余次元 > 1 の閉集合 E で $f^{-1}(E)$ は X 内で余次元 > 1、さらに $f : X \setminus f^{-1}(E) \simeq cont_R(X) \setminus E$ となるものがある。この場合は $cont_R(X)$ ではなく、**フリップ**と呼ばれる別の代数多様体を求めることが必要になる。Z 上の射影多様体で高々端末特異点しか持たない X^+ が存在し次の条件を満たす。(i) $f^+ : X^+ \to cont_R(X)$ は $cont_R(X) \setminus E$ 上では同型、(ii) $(f^+)^{-1}(E)$ は X^+ 内で余次元 > 1、(iii) K_{X^+} は $cont_R(X)$ 上豊富である。このような X^+ は存在すれば同型を除いて一意的であることがわかる。X^+ あるいは双有理写像 $X \dashrightarrow X^+$ をフリップという。

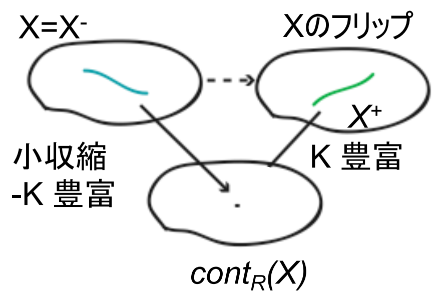

図 20: フリップ

当時既に、[Fra80] においてフリップの具体例が提示されていた。Reid 氏は [Rei83] において次の予想を提示した。

Conjecture 3.6 (極小モデル予想) X は特異点としては $\mathbb{Q}$ 分解的な端末特異点のみを持つ射影代数多様体とする。標準因子 K_X が非負でない、つまり端射線 R を持ち、収縮射 $cont_R : X \to cont_R(X)$ が小収縮とする。この時、フリップ $X \dashrightarrow X^+$ が存在し (存在予想)、X^+ は高々 $\mathbb{Q}$ 分解的な端末特異点しか持たない。しかもフリップは無限回起ることはない (停止予想)。

その後、極小モデルプログラムの枠組みは X. Benveniste、川又、J.Kollár、Reid、Shokurov 等により、特異点の制約も緩められ、高次元化され大きく発展してきた。中でもログ標準特異点などを扱ったり次元に関する帰納法が上手く機能するように、正規射影多様体 X と X の $\mathbb{Q}$ 因子 D の対 (X, D) を X の代わりに用いられる事が多いが、本講演では入口を眺めるだけなので、$(X, 0)$ 即ち代数多様体 X を扱うに留める。

３次元においてフリップが無限回起こらないことは Shokurov[Sho85] が既に確立していたが、存在予想は [Mor88] により解決され、３次元極小モデルプログラムは解決した。

3.6.1. ３次元における、Fano 多様体や端射線の収縮射の分類

極小モデルプログラムとは独立に、３次元の端射線の収縮射が決定できたら、直ちに元々興味を持っていた３次元 Fano 多様体の分類への応用に取りかかった。

当時、Iskovskikh による分類 [Isk77]、[Isk78] により、第２ Betti 数 $B_2(X) = 1$ となる３次元 Fano 多様体の分類は一先ずなされていた。しかし、$B_2(X) > 1$ となる X については手がかりとなる情報がなく手つかずだった。

非特異 Fano 多様体 X に対しては、$\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$ 全体が $K_X < 0$ の側にあるので、$NE(X) = \overline{NE}(X)$ は有限個の端射線で生成されており、各々の端射線が X の重要な幾何学的情報を持っている。従って、$NE(X)$ は少なくとも $B_2(X)$ 個の端射線を持つので、$B_2(X) > 1$ の場合でも分類可能だという発想がきっかけだった。この分類の成功 [MoMu81] は共同研究者に向井茂氏に依るところが大だった。彼はベクトル束の専門家で初等変換を使いこなし、私の目標以上に綺麗な結果となった。(４回生の時に永田先生に出された３次元有理多様体の例を作る問題に対して、考えられる可能性を列挙したという意味で、向井氏との共同の答えと言える。)

さらに予想外だったのは、$B_2(X) = 1$ の場合の Iskovskikh による分類 [Isk78] の精密化にも端射線の理論が役立ったことだ。「Fano の二重射影」という操作をフリップの兄弟分とも言うべきフロップという操作を用いて仕上げられた。これが上で「一先ずなされていた」という意味である。

３次元においてフリップの存在を証明した時、[Mor88] は端収縮射のうち解析的な小収縮を分類途上だった。[KoMo92] はそれを大まかに完成させたものである。森は Y. Prokhorov と共に３次元コニック束に関する Iskovskikh 予想

Conjecture 3.7 X は高々端末特異点しか持たない３次元射影多様体とし、$f : X \to Z$ は端収縮射でもあるコニック束とする。この時、Z は高々Du Val 特異点しか持たない。

を証明したが、これも [Mor88] の手法を活用したものである。

4. その後の発展について

3.5.1 の後、存在予想は任意次元において C.Hacon と J.McKernan[HaMc07] により解決されたが、停止予想の方は任意次元では解決していない。すこし制約がある特殊なスケール付き極小モデルプログラムは任意次元で多くの有用な場合に解決された [BCHM10]。これにより極小モデルプログラムが幅広く応用されるようになった。

一般化というだけでなく証明の手法上でも重要なログ化、つまり多様体 X でなく多様体と $\mathbb{Q}$ 因子の対 (X, D) が重要な研究対象となっているが、ここでは紹介の簡素化のために、$D = 0$ の場合しか考慮しなかった。

C. Birkar 氏による最近の ABA 予想の解決は端末特異点の場合に限っても、任意次元で解決した点で素晴らしい。

Theorem 4.1 (Birkar) 各次元 n について高々端末特異点しか持たない Fano 多様体は有界である、即ち、有限個の代数多様体によりそれらの n 次元 Fano 多様体がパラメータ付けされる。

これにより、3 次元までしか知られていなかった結果、例えば、停止予想が高次元でもアタック可能になることを期待し切望する。

参考文献

[BCHM10] Birkar, Caucher; Cascini, Paolo; Hacon, Christopher D.; McKernan, James. Existence of minimal models for varieties of log general type. J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 2, 405–468.

[Fra80] Francia, P. Some remarks on minimal models. I. Compositio Math. 40 (1980), no. 3, 301–313.

[FujT73-74] Fujita, Takao. On the structure of certain types of polarized varieties. I, II. Proc. Japan Acad. 49 (1973), 800–802; ibid. **50** (1974), 411–412.

[FujTT75] Fujita, Takao. On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 103–115.

[HaMc07] Hacon, Christopher D.; McKernan, James. Extension theorems and the existence of flips. Flips for 3-folds and 4-folds, 76–110, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 35, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.

[Hir62] Hironaka, Heisuke. An example of a non-Kählerian complex-analytic deformation of Kählerian complex structures. Ann. of Math. (2) 75 1962 190–208.

[Isk77] Iskovskih, V. A. Fano threefolds. I. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977), no. 3, 516–562, 717; English translation: Math. USSR-Izv. 11 (1977), no. 3, 485–527 (1978).

[Isk78] Iskovskih, V. A. Fano threefolds. II. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 42 (1978), no. 3, 506–549; English translation: Math. USSR-Izv. 12 (1978), no. 3, 469–506 (1979).

[Kaw84a] Kawamata, Yujiro. Elementary contractions of algebraic 3-folds. Ann. of Math. (2) 119 (1984), no. 1, 95–110.

[Kaw84b] Kawamata, Yujiro. The cone of curves of algebraic varieties. Ann. of Math. (2) 119 (1984), no. 3, 603–633.

[KoMo92] Kollár, János; Mori, Shigefumi. Classification of three-dimensional flips. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 3, 533–703; Errata ibid. 20 (2007), no. 1, 269–271.

[Mab77] Mabuchi, Toshiki. C('3)-ACTIONS AND ALGEBRAIC THREEFOLDS WITH AMPLE TANGENT BUNDLE. Thesis (Ph.D.) - University of California, Berkeley. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1977.

[McK17] McKernan, James. Rational curves on algebraic spaces. *Higher dimensional algebraic geometry–in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday*, 313–319, Adv. Stud. Pure Math., 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[MiMo86] Miyaoka, Yoichi; Mori, Shigefumi. A numerical criterion for uniruledness. Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 1, 65–69.

[Mor75] Mori, Shigefumi. On a generalization of complete intersections. J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975), no. 3, 619–646.

[Mor79] Mori, Shigefumi. Projective manifolds with ample tangent bundles. Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 593–606.

[MoMu81] Mori, Shigefumi; Mukai, Shigeru. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. Manuscripta Math. 36 (1981/82), no. 2, 147–162; Errata ibid. 110 (2003), no. 3, 407.

[Mor82] Mori, Shigefumi. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Ann. of Math. (2) 116 (1982), no. 1, 133–176.

[Mor85] Mori, Shigefumi. On 3-dimensional terminal singularities. Nagoya Math. J. 98 (1985), 43–66.

[Mor88] Mori, Shigefumi. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 117–253.

[MoPro08a] Mori, Shigefumi; Prokhorov, Yuri. On $\mathbb{Q}$-conic bundles. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), no. 2, 315–369.

[MoSu78] Mori, Shigefumi; Sumihiro, Hideyasu. On Hartshorne's conjecture. J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), no. 3, 523–533.

[Rei81] Reid, Miles. Minimal models of canonical 3-folds. Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981), 131–180, Adv. Stud. Pure Math., 1, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[Rei83] Reid, Miles. Decomposition of toric morphisms. Arithmetic and geometry, Vol. II, 395–418, Progr. Math., 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Rei85] Reid, Miles. Young person's guide to canonical singularities. Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 345–414, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Sho85] Shokurov, V. V. A nonvanishing theorem. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (1985), no. 3, 635–651; Math. USSR-Izv. 26 (1986), 591–604.

[SiYu80] Siu, Yum Tong; Yau, Shing Tung. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. Invent. Math. 59 (1980), no. 2, 189–204.

[Tan75] Tango, Hiroshi On a criterion of a projective space. Bull. Kyoto Univ. Ed. Ser. B No. 47 (1975), 1–11.

[Uen74] Ueno, Kenji. Introduction to classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds, pp. 288–332. Lecture Notes in Math., Vol. 412, Springer, Berlin, 1974.