非線形偏微分方程式の粘性解理論の発展

石井　仁司　(津田塾大学（研究員），早稲田大学（名誉教授）)*

概　　要

偏微分方程式の粘性解の概念はM. G. CrandallとP.-L. Lionsにより導入されてから40年近くになる．本講演ではこの理論の発展の歴史を概観し，さらに，本講演者が近年興味を持った微分方程式の漸近問題への粘性解理論の応用とその理論へのフィードバックについて二つの例で一端に触れる．

1. 出発点

本講演者は偏微分方程式の**粘性解**（viscosity solution）の研究に長年携わってきた．講演では粘性解理論の発展について少し振り返ってみる．本講演者の不勉強による独断と偏見に満ちていると思われるが，そのような点については笑って受け止めて頂ければ幸いです．

粘性解に関連する主要な参考文献として，まず，[1, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 26, 27, 33, 34, 37, 42] を挙げておく．

粘性解という命名は**粘性消去法** (vanishing viscosity method) の影響を受けたものである．ここでの粘性消去法は，ハミルトン・ヤコビ方程式の自然な解あるいは物理的に意味のある解を得るために，与えられたハミルトン・ヤコビ (Hamilton-Jacobi) 方程式に粘性項を加えた楕円型方程式あるいは放物型方程式を解き，この解の粘性係数を0として得られる極限関数としてハミルトン・ヤコビ方程式の解を見出そうというものである．ただし，これは粘性解の定義ではないことに注意する．

M. G. CrandallとP.-L. Lionsによって粘性解概念が導入 [13, 14] されたのは1980年代初頭である．それに先立つ1970年代の国内での偏微分方程式理論の研究を思い起こすと次のような状況が頭に浮かぶ．

- 線形理論 : 溝畑茂 (偏微分方程式論)，擬微分作用素，Fourier積分作用素, 熊ノ郷準
- 半群理論，非線形半群理論： 吉田耕作，加藤敏夫，宮寺功，高村幸男
- 非線形偏微分方程式（関数解析的）研究の黎明期 : 山口昌哉，藤田宏，飯野理一

ハミルトン・ヤコビ方程式に対するCrandall–Lionsによる粘性解概念の導入には，S. N. Kruzkovによって導入された**エントロピー解**の概念 [35] が大きく影響を与えたものと思われる．Crandallによる保存則に対する非線形半群理論からのアプローチ [10]，相沢貞一によるハミルトン・ヤコビ方程式に対する同様なアプローチ [2]，佐藤健一 [43] 等による単調作用素の特徴づけの成果を基礎とするL. C. Evansの（連続関数の空間における）一般化されたMintyの方法による完全非線形楕円型方程式およびハミルトン・ヤコビ方程式の解法の導入 [18] は影響を与えていると思われる．Crandall–Evans–Lions

---

本研究は科研費 (課題番号:16H03948，18H00833) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: MSC-49H25, MSC-35D40, MSC-35B40
キーワード : viscosity solution, Hamilton-Jacobi equation, fully nonlinear elliptic equation, asymptotic analysis

* 〒187-8577 東京都小平市津田町 2-1-1 津田塾大学数学・計算機科学研究所
e-mail: hitoshi.ishii@waseda.jp
web: http://www.f.waseda.jp/hitoshi.ishii/

はハミルトン・ヤコビ方程式に対する粘性解概念をすぐに整理し [11]，最大値原理との関連をより明確にした．

2. 粘性解と最大値原理

ここで粘性解の定義を述べる．Ω を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし，F を $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$ 上の実数値連続関数とする．ただし，$\mathbb{S}^n$ により $n \times n$ 実対称行列の全体を表す．2 階偏微分方程式

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

を考える．$Du\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ は u の勾配であり，$D^2u\colon \Omega \to \mathbb{S}^n$ は u のヘッセ行列である．$X, Y \in \mathbb{S}^n$ に対して，$X - Y$ が非負定値であることを $X \geq Y$ と表す．(1) が退化楕円型方程式であるとは

$$X \leq Y \text{ ならば，}\quad F(x, r, p, X) \geq F(x, r, p, Y) \quad \forall (x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

という単調性を持つことである．1 階の偏微分方程式はすべて退化楕円型である．例えば，ポアッソン (Poisson) 方程式 $-\Delta u = f(x)$ は退化楕円型である．(F としては $-\operatorname{tr} X - f(x)$ が対応する．ただし，$\operatorname{tr} X$ は行列 X のトレース.) 関数 u, v が $C^2(\Omega)$ に属し，$u - v$ が $\hat{x} \in \Omega$ で極大値をとるとき，微分法の基本として，次が成り立つ：

$$D(u - v)(\hat{x}) = 0, \quad D^2(u - v)(\hat{x}) \leq 0. \tag{2}$$

すなわち，

$$Du(\hat{x}) = Dv(\hat{x}), \quad D^2u(\hat{x}) \leq D^2v(\hat{x}).$$

例えば，u が (1) の解であり，F が退化楕円型方程式であれば，

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) \leq 0 \tag{3}$$

が成り立つ．上の不等式は関数 u に関してはその勾配とヘッセ行列の値には依らない．連続関数 $u \in C(\Omega)$ が (1) の**粘性劣解** (viscosity subsolution) であるとは，任意の $v \in C^2(\Omega)$ と $\hat{x} \in \Omega$ が与えられたとき，$u - v$ が $\hat{x}$ で極大値を取るならば，不等式 (3) が成り立つことである．同様に，関数 $u \in C(\Omega)$ が (1) の**粘性優解** (viscosity supersolution) であるとは，任意の $v \in C^2(\Omega)$ と $\hat{x} \in \Omega$ が与えられたとき，$u - v$ が $\hat{x}$ で極小値を取るならば，不等式 $F(\hat{x}, u(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) \geq 0$ が成り立つことである．(1) の粘性劣解であり，かつ粘性優解である関数を (1) の**粘性解** (viscosity solution) と言う．(2) 式は滑らかな関数の極大点での基本的な関係式であり，また 2 階楕円型方程式に対する最大値原理を導くための要である．(2) を基本最大値原理と呼べば，この基本最大値原理は粘性解導入の基盤と言える．さらに，Crandall-Lions によるハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の導入は粘性解に対する比較定理の証明と共になされ，当初から粘性解理論における比較原理の重要性が認識されていた．比較原理とは，(1) について述べれば次の原理である．

比較原理 v, w をそれぞれ (1) の粘性劣解と粘性優解とし，境界 $\partial\Omega$ 上で $v \leq w$ が成り立つときに，Ω 上で $v \leq w$ が成り立つ．

この比較原理が成り立てば，ディリクレ (Dirichlet) 問題の粘性解の一意性がすぐに得られる．例えば，Ω が有界領域の場合にポアッソン方程式に対しては,「粘性解」を「古典解」に置き替えた比較原理が成り立つという定理は良く知られている．線形斉次方程式の場合には，上の比較原理で $w \equiv 0$ を優解に取り，$v \leq 0$ が成り立つという主張を最大値原理と呼ぶが，最大値原理から非斉次方程式に対する比較原理が従う．この意味で，比較原理は非線形方程式に対する最大値原理とみなせる．念のために，上に述べた条件だけでは，(1) に対して比較原理は成り立たない．次の図式が成り立つ．

粘性解理論 $\subset$ 最大値原理 $\subset$ 偏微分方程式理論

3. 粘性解理論の発展

次のような年表を作ってみた．年次欄には最初の重要な論文が出版された年を記入した．

年表

1981 年	粘性解の導入，基礎理論（比較定理，解の存在）
1983 年	最適制御および確率制御の動的計画法
	2 階 HJB 方程式に対する比較原理（確率解析手法）
1984 年	微分ゲームの動的計画法
1985 年	大偏差 (Large deviation) 型評価
	バナッハ (Banach) 空間上の粘性解，偏微分方程系の制御
1987 年	ハミルトン・ヤコビ方程式の周期的均質化
1988 年	2 階 HJBI 方程式に対する比較原理（解析的手法）
1989 年	一様楕円型方程式に対する粘性解の正則性
1991 年	特異性を持つ方程式， 曲率流に対する等高面法
1993 年	∞–ラプラス方程式
1996 年	L^p 粘性解の導入
1997 年	弱 KAM 理論
1999 年	ハミルトン・ヤコビ方程式の確率的均質化
2006 年	平均場ゲーム
2008 年	距離空間上の粘性解
2010 年	ネットワーク上のハミルトン・ヤコビ方程式

ただし，HJB，HJBI はそれぞれ Hamilton-Jacobi-Bellman，Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs の略である． HJB 方程式は，(1) で言えば F が

$$F(x,r,p,X) = \sup_{\alpha\in\mathbf{A}}(-\operatorname{tr}[a_\alpha(x)X] + (b_\alpha(x),p) + c_\alpha(x)r - f_\alpha(x))$$

の形を持つものである．$\mathbf{A}$ は添字集合であり，各 $\alpha \in \mathbf{A}$ に対して $a_\alpha(x) \in \mathbb{S}^n$, $b_\alpha(x) \in \mathbb{R}^n$, $c_\alpha(x) \in \mathbb{R}$ となり，それぞれ x の連続関数である．特に，$a_\alpha(x)$ は非負定値であるとする．(x,y) は $x,y \in \mathbb{R}^n$ の内積を表す．この様な方程式は確率制御に現れる．HJBI 方程式では，添字集合 $\mathbf{B}$ が加わり，F の形は

$$F(x,r,p,X) = \inf_{\beta\in\mathbf{B}}\sup_{\alpha\in\mathbf{A}}(-\operatorname{tr}[a_{\alpha,\beta}(x)X] + (b_{\alpha,\beta}(x),p) + c_{\alpha,\beta}(x)r - f_{\alpha,\beta}(x)) \tag{4}$$

となる．HJBI 方程式は確率微分ゲームに現れる．退化楕円型方程式が関数 F で与えられるとき，F が十分な連続性を持てば（例えば，リプシッツ連続），F を (4) の様に表

すことが出来る [21,25]．この意味で，HJBI 方程式は一般の退化楕円型方程式であると言える．

4. 比較定理の解析的証明

上の年表の 1988 年の項に解析的手法による HJBI 方程式に対する比較原理の証明を挙げた．これは R. Jensen[32] によるものである．この研究で，粘性解研究に半凸（semi-convex）関数に対する Aleksandrov–Bakelman–Pucci 型の最大値原理が導入され，上限たたみ込み（sup-convolution），下限たたみ込み (inf-convolution) という近似法が本格的に導入された．[32] において得られた比較定理は，方程式を定める関数 $F = F(x, r, p, X)$ が x に依存する場合を除くものでその改良が望まれた．本講演者を中心にして次のような最大値定理が確立された [12].

定理 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は開集合とし，$v, w \in C(\Omega)$，$\phi \in C^2(\Omega \times \Omega)$ とする．さらに，関数 $v(x)+w(y)-\phi(x,y)$ は $(\hat{x},\hat{y}) \in \Omega\times\Omega$ において最大値を取るとする．$A = D^2\phi(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{S}^{2n}$ とおき，$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．このとき，行列 $X_\varepsilon, Y_\varepsilon \in \mathbb{S}^n$ が存在し，次を満たす．

$$\begin{cases} -\Big(\dfrac{1}{\varepsilon} + \|A\|\Big) \le \begin{pmatrix} X_\varepsilon & 0 \\ 0 & Y_\varepsilon \end{pmatrix} \le A + \varepsilon A^2, \\ (D_x\phi(\hat{x},\hat{y}), X_\varepsilon) \in \overline{J}^{\,2,+} v(\hat{x}), \quad (D_y\phi(\hat{x},\hat{y}), Y_\varepsilon) \in \overline{J}^{\,2,+} w(\hat{y}). \end{cases}$$

上の定理における記号を補足説明する．まず，$\|A\| := \max\{|(Az,z)| : z \in \mathbb{R}^{2n}, \, |z| = 1\}$ であり，

$$J^{2,+}u(x) := \{(D\psi(x), D^2\psi(x)) : \psi \in C^2(\Omega), \; u - \psi \text{ は } x \text{ において極大となる}\}.$$

さらに，$\overline{J}^{\,2,+}u(x)$ は

$$(p, X) \in \overline{J}^{\,2,+}u(x) \iff \exists x_k \in \Omega, \; \exists (p_k, X_k) \in J^{2,+}u(x_k) \;\; \text{such that}$$
$$\lim_k (x_k, u(x_k), p_k, X_k) = (x, u(x), p, X)$$

と定義される．上の定理 1 は，v, w が Ω 上の実数値上半連続関数の場合にも成り立つ．定理 1 を使えば，F が (4) で与えられる場合に，Ω が有界領域であり，関数族 $\{a_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta \in \mathbf{A}\times\mathbf{B})\}$ と $\{b_{\alpha,\beta} : (\alpha,\beta) \in \mathbf{A}\times\mathbf{B}\}$ と $\{(c_{\alpha,\beta}, f_{\alpha,\beta}) : (\alpha,\beta) \in \mathbf{A}\times\mathbf{B}\}$ がそれぞれ $C^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^n)$ と $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ と $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ の有界集合であり，さらに

$$\inf_{(\alpha,\beta,x)\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\Omega} c_{\alpha,\beta}(x) > 0$$

を満たせば，(1) に対して比較原理がなりたつことを示すことが出来る．

5. 長時間挙動

今後は粘性解を単に解と呼ぶことにする．つぎにハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間漸近挙動の研究に少し触れる．ここで述べる話は弱 KAM 理論 (A. Fathi[22,24]，W. E [17], L. C. Evans-D. A. Gomes[19,20] を参照) の応用例とも言える．特に，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の構造を見る上での射影オーブリー (Aubry) 集合の重要性に触れる．

初期値問題

$$
\text{(CP)} \qquad \begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}
$$

を考え，この解 $u = u(x,t)$ の $t \to \infty$ としたときの漸近挙動を調べる．ただし，$\Omega := \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$（$n$ 次元トーラス）, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とし，$u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数，$u_t = \partial u/\partial t$，$Du = (\partial u/\partial x_1, ..., \partial u/\partial x_n)$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ であるとする．

古典的な結果についてはS. N. Kruzkov [36], P.-L. Lions [37], G. Barles [5] を参照のこと．

次のような解 u の形式的な展開

$$
u(x,t) = a_0(x)t + a_1(x) + a_2(x)t^{-1} + \cdots \qquad \text{as } t \to \infty,
$$

を考え，これを (CP) に代入すると

$$
\begin{aligned} a_0(x) + \frac{-a_2(x)}{t^2} + \cdots \\ + H(x, Da_0(x)t + Da_1(x) + Da_2(x)t^{-1} + \cdots) = 0. \end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{cases} a_0(x) \equiv a_0 \quad (\text{定数}), \\ a_0 + H(x, Da_1(x)) = 0 \end{cases}
$$

が得られる．これは次の**エルゴード問題**（ergodic problem）を提起する：

$$
\text{(EP)} \qquad H[v] = c \quad \text{in } \Omega
$$

が成立する $(c, v) \in \mathbb{R} \times C(\Omega)$ を求めよという問題である．**加法的固有値問題**（additive eigenvalue problem）とも呼ばれる．以下では，$H[u]$ で $H(x, Du)$ を表す．定数 c を**臨界値**（critical value）あるいは**加法的固有値**（additive eigenvalue）と呼ぶ．

(c, v) がエルゴード問題の解であれば，関数 $u(x,t) := -ct + v(x)$ は $u_t + H[u] = 0$ の解である．このとき，$-ct + v(x)$ を $u_t + H[u] = 0$ の**漸近解**（asymptotic solution）と呼ぶ．

次の記号を導入する．$\mathcal{S}_H^- = \mathcal{S}_H^-(\Omega)$ と $\mathcal{S}_H^+ = \mathcal{S}_H^+(\Omega)$ はそれぞれ $H[u] = 0$ in Ω の劣解の全体と優解の全体を表す．さらに，$\mathcal{S}_H = \mathcal{S}_H(\Omega) := \mathcal{S}_H^- \cap \mathcal{S}_H^+$ とおく．

(CP) の解の長時間挙動に関する1990年代後半の重要な貢献として，以下を挙げる．G. Namah and J.-M. Roquejoffre [40], A. Fathi [23], G. Barles–P. E. Souganidis [8].

A. Davini–A. Siconolfi[16] の結果を以下に簡単に紹介する．$\Omega = \mathbb{T}^n$, $u_0 \in C(\Omega)$, $H \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ とし，ハミルトニアン H は凸かつ強圧的とする．すなわち，次を満たす：

$$
p \mapsto H(x,p) \text{ は凸関数} \quad \forall x \in \Omega,
$$

$$
\lim_{|p| \to \infty} H(x,p) = \infty \quad \forall x \in \Omega.
$$

定理 2. 上に述べた仮定の下で次が成り立つ． (i) エルゴード問題 (EP) は解 $(c, v) \in \mathbb{R} \times C(\Omega)$ を持つ．さらに，臨界値 c は一意に定まる．

(ii) 初期値問題 (CP) は一意解 $u \in C(\Omega \times [0, \infty))$ を持つ．

(iii) すべての x に対して，関数 $p \mapsto H(x, p)$ が狭義凸であると仮定する．初期値問題 (CP) の解 u に対して，エルゴード問題の解 (c, v) が存在し，次が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in\Omega} |u(x, t) + ct - v(x)| = 0.$$

(iv) 上の (iii) に現れる関数 v は次の様に特徴づけられる．

$$v_0(x) := \sup\{\psi(x) \mid \psi \in \mathcal{S}^-_{H-c},\ \psi \le u_0 \quad in\ \Omega\}$$

とおくとき，

$$v(x) = \inf\{\phi(x) \mid \phi \in \mathcal{S}_{H-c},\ \phi \ge v_0 \quad in\ \Omega\}.$$

(ii) は古典的な解の存在と一意性を述べたものであり，(i) は P.-L. Lions–G. Papanicolaou–S. R. S. Varadhan [39] の結果である．(iii) は漸近解への一様収束を主張するが，狭義凸性の仮定なしでは一般には成立しないことが知られている．

例えば， $H(x, p) = |p|^2 + f(x)$ は上の定理の仮定を満たす．この場合には，臨界値 c は $\max_\Omega f$ に等しい．

(c, v) がエルゴード問題 (EP) の解であるとき，A を定数として，$(c, v + A)$ も解である．一般には，(EP) の解構造はもっと複雑である．例えば，$\psi \in C^1(\Omega)$ が定数関数ではないとき，ハミルトン・ヤコビ方程式 $(Du, Du - D\psi) = 0$ in Ω を考えると，ハミルトニアンは $H(x, p) = (p, p - D\psi(x))$ であり，上の定理の仮定を満たしている．ハミルトニアンが凸な場合には，2 つの解 v, w に対して，$\min\{v, w\}$ も解であることが知られており，A, B を任意の定数とするとき，$\min\{A, \psi + B\}$ は，いま考えているハミルトン・ヤコビ方程式の解である．

H は定理 2 と同様に凸かつ強圧的なハミルトニアンであるとし，c を臨界値とする．

$$d(x, y) = \sup\{w(x) - w(y) : w \in \mathcal{S}^-_{H-c}(\Omega)\}$$

とおいて，$d\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ を定義する．d は次の性質を持つ：

$$\begin{aligned} &d(y, y) = 0, && d(\cdot, y) \in \mathcal{S}^-_{H-c}(\Omega), \\ &d(\cdot, y) \in \mathcal{S}_{H-c}(\Omega \setminus \{y\}), && d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

射影オーブリー集合 $\mathcal{A}$ をつぎで定義する：

$$\mathcal{A} = \{y \in \Omega : d(\cdot, y) \in \mathcal{S}_{H-c}\}.$$

次のような (EP) の解の表現公式が成り立つ．

定理 3. 上に述べた仮定の下に，(EP) の解 u は次の様に表される：

$$u(x) = \min_{y\in\mathcal{A}} (u(y) + d(x, y)) \quad \forall x \in \Omega.$$

定理2に現れる関数v_0, vは次の様に表される：

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \min\{u_0(y)+d(x,y) : y\in\Omega\},\\ v(x) &= \min\{v_0(y)+d(x,y) : y\in\mathcal{A}\}\\ &= \min\{u_0(y)+d(z,y)+d(x,z) : y\in\Omega,\, z\in\mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

ハミルトニアンHに対するラグランジアン（Lagrangian）$L:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$を

$$L(x,\xi)=\sup_{p\in\mathbb{R}^n}((\xi,p)-H(x,p))$$

と定めるとき，次が成り立つ：

$$d(x,y)=\inf\int_0^T (L(\gamma(t),\dot\gamma(t))+c)dt.$$

ただし，$\dot\gamma=d\gamma/dt$であり，上の下限(inf)は全ての$T>0$と$\gamma(T)=x$, $\gamma(0)=y$を満たす絶対連続曲線$\gamma:[0,\,T]\to\Omega$について取る．

講演ではその後の発展（例えば，[7,28,29]）についても触れる．

6. 割引消去問題

次に割引消去問題を考える．割引率$\lambda>0$を持つ割引問題

$$\text{(DP)}\qquad \lambda u^\lambda+H(x,Du^\lambda(x))=0\quad\text{in }\Omega$$

を考え(記号u^λのλはパラメータλへの依存性を表す)，$\lambda\to 0+$とするときの(DP)の解u^λの漸近挙動を調べる問題を割引消去問題と呼ぶ．$\lambda\to 0+$とするときに，形式的な展開

$$u^\lambda(x)=a_0(x)\lambda^{-1}+a_1(x)+a_2(x)\lambda+\cdots$$

を考えれば，

$$\begin{aligned} &a_0(x)+a_1(x)\lambda+\cdots\\ &\qquad +H(x,Da_0(x)\lambda^{-1}+Da_1(x)+Da_2(x)\lambda+\cdots)=0. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases} a_0(x)\equiv a_0\ (\text{定数}),\\ a_0+H(x,Da_1(x))=0. \end{cases}$$

一方，(c,v) を(EP)の解とするとき, 関数$v^\lambda:=-c\lambda^{-1}+v$ は次を満たす：

$$\lambda v^\lambda+H(x,Dv^\lambda(x))=-c+\lambda v(x)+H(x,Dv(x))=\lambda v(x).$$

次に述べる結果(定理4)はA. Davini–A. Fathi–G. Iturriaga–M. Zavidovique [15]によって得られたものである．記号の準備をする．$\Omega\times\mathbb{R}^n$上のボレル（Borel）関数fとボレル測度νに対して，

$$\langle\nu,f\rangle:=\int_{\Omega\times\mathbb{R}^n} f(x,\xi)\nu(dxd\xi).$$

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(L)$ により，Ω 上のボレル確率測度 μ で

$$\begin{cases} (1) \quad \langle \mu, |\xi| \rangle < \infty, \\ (2) \quad \langle \mu, (\xi, D\phi) \rangle = 0 \quad \forall \phi \in C^1(\Omega), \\ (3) \quad \langle \mu, L \rangle + c = 0 \end{cases}$$

を満たすものの全体を表す．(3) における L は H に対するラグランジアンである．$\mu \in \mathfrak{M}(L)$ を**マザー (Mather) 測度**と呼ぶ．Ω 上のボレル確率測度 μ で上の (1), (2) を満たすものを閉測度 (closed measure) と呼び，その全体を $\mathfrak{C}$ と表す．まず,

$$\langle \mu, L + c \rangle \geq 0 \;\; \forall \mu \in \mathfrak{C}$$

が成り立つことに注意する．条件 (3) はマザー測度が $\mathfrak{C}$ の測度 μ で $\langle \mu, L + c \rangle$ の値を最小化するもの (minimizer) であることを意味する．

定理 4. 定理 2 と同じく H が凸かつ強圧的であることを仮定し，u^λ は (DP) の解であるとする．臨界値 c に対して，関数族 $\{u^\lambda + \lambda^{-1} c\}_{\lambda > 0}$ は，$\lambda \to 0+$ とするとき，ある関数 $u^0 \in C(\Omega)$ に一様収束する．(c, u^0) はエルゴード問題 (EP) の解である．さらに，u^0 は次の式で特徴づけられる．

$$v(x) = \max\{w(x) \mid w \in \mathcal{S}^-_{H-c}, \; \langle \mu, w \rangle \leq 0 \;\; \forall \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

上の定理の仮定の下で，(DP) が一意解をもつことは良く知られている．

$z \in \Omega, \lambda \geq 0$ に対して, 記号 $\mathfrak{C}(z, \lambda)$ により $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上のボレル確率測度 ν でつぎを満たすものの集合を表す.

$$\begin{cases} \langle \nu, |\xi| \rangle < \infty, \\ \langle \nu, \lambda\phi + (\xi, D\phi) \rangle = \lambda\phi(z) \;\; \forall \phi \in C^1(\Omega). \end{cases}$$

定理 5. H は凸で強圧的なハミルトニアンであるとし，$u^\lambda \in C(\Omega)$ は (DP) の解であるとする． 次が成り立つ：

$$\min_{\nu \in \mathfrak{C}(z,\lambda)} \langle \nu, L \rangle = \lambda u^\lambda(z).$$

これも一つの解の表限定理であり，定理 4 の証明の一つの柱である．

講演では割引消去問題の研究のその後の展開（例えば，[30, 31, 41, 44]）についても触れる．

参考文献

[1] Yves Achdou, Guy Barles, Hitoshi Ishii, and Grigory L. Litvinov, *Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2074, Springer, Heidelberg; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2013. Lecture Notes from the CIME Summer School held in Cetraro, August 29–September 3, 2011; Edited by Paola Loreti and Nicoletta Anna Tchou; Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries.

[2] Sadakazu Aizawa, *A semigroup treatment of the Hamilton-Jacobi equation in several space variables*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), no. 1, 15–30.

[3] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.

[4] M. Bardi, M. G. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis, *Viscosity solutions and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1660, Springer-Verlag, Berlin; Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Florence, 1997. Lectures given at the 2nd C.I.M.E. Session held in Montecatini Terme, June 12–20, 1995; Edited by I. Capuzzo Dolcetta and P. L. Lions; Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries.

[5] G. Barles, *Asymptotic behavior of viscosity solutions of first Hamilton Jacobi equations*, Ricerche Mat. **34** (1985), no. 2, 227–260.

[6] ———, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 17, Springer-Verlag, Paris, 1994 (French, with French summary).

[7] Guy Barles, Hitoshi Ishii, and Hiroyoshi Mitake, *A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Bull. Math. Sci. **3** (2013), no. 3, 363–388.

[8] G. Barles and Panagiotis E. Souganidis, *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), no. 4, 925–939.

[9] Luis A. Caffarelli and Xavier Cabré, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[10] Michael G. Crandall, *The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables*, Israel J. Math. **12** (1972), 108–132.

[11] M. G. Crandall, L. C. Evans, and P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), no. 2, 487–502.

[12] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 1, 1–67.

[13] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions, *Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), no. 3, 183–186 (French, with English summary).

[14] M. G. Crandall and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 1, 1–42.

[15] Andrea Davini, Albert Fathi, Renato Iturriaga, and Maxime Zavidovique, *Convergence of the solutions of the discounted Hamilton-Jacobi equation: convergence of the discounted solutions*, Invent. Math. **206** (2016), no. 1, 29–55.

[16] Andrea Davini and Antonio Siconolfi, *A generalized dynamical approach to the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 2, 478–502.

[17] Weinan E, *Aubry-Mather theory and periodic solutions of the forced Burgers equation*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 7, 811–828.

[18] Lawrence C. Evans, *A convergence theorem for solutions of nonlinear second-order elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), no. 5, 875–887.

[19] L. C. Evans and D. Gomes, *Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics. I*, Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), no. 1, 1–33.

[20] ———, *Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics. II*, Arch. Ration. Mech. Anal. **161** (2002), no. 4, 271–305.

[21] L. C. Evans and P. E. Souganidis, *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), no. 5, 773–797.

[22] Albert Fathi, *Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 9, 1043–1046 (French, with English and French summaries).

[23] ———, *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 3, 267–270 (French, with English and French summaries).

[24] ———, *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, Preliminary version, No. 10*, `https://www.math.ubordeaux.fr~pthieull/Recherche/KamFaible/Publications/Fathi2008_01.pdf`.

[25] Wendell H. Fleming, *The Cauchy problem for degenerate parabolic equations*, J. Math. Mech. **13** (1964), 987–1008.

[26] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, 2nd ed., Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 25, Springer, New York, 2006.

[27] Y. Giga, *Surface evolution equations. A level set approach*, Monographs in Mathematics, vol. 99, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[28] Hitoshi Ishii, *Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), no. 2, 231–266 (English, with English and French summaries).

[29] Naoyuki Ichihara and Hitoshi Ishii, *Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians*, Arch. Ration. Mech. Anal. **194** (2009), no. 2, 383–419.

[30] Hitoshi Ishii, Hiroyoshi Mitake, and Hung V. Tran, *The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 1: The problem on a torus*, J. Math. Pures Appl. (9) **108** (2017), no. 2, 125–149.

[31] ———, *The vanishing discount problem and viscosity Mather measures. Part 2: Boundary value problems*, J. Math. Pures Appl. (9) **108** (2017), no. 3, 261–305.

[32] Robert Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **101** (1988), no. 1, 1–27.

[33] S. Koike, *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, MSJ Memoirs, vol. 13, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[34] 小池 茂昭, 粘性解—比較原理を中心に—, 共立講座 数学の輝き, vol. 8, 共立出版, 2016. 新井 仁之・小林 俊行・斎藤 毅・吉田 朋広 編.

[35] S. N. Kružkov, *First order quasilinear equations with several independent variables.*, Mat. Sb. (N.S.) **81 (123)** (1970), 228–255 (Russian).

[36] ———, *Generalized solutions of nonlinear equations of the first order with several independent variables. II*, Mat. Sb. (N.S.) **72 (114)** (1967), 108–134 (Russian).

[37] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics, vol. 69, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1982.

[38] ———, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. Viscosity solutions and uniqueness*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), no. 11, 1229–1276 (English, with French summary).

[39] P.-L. Lions, G. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan, *Homogenization of Hamilton–Jacobi equations*, unpublished work (1987).

[40] Gawtum Namah and Jean-Michel Roquejoffre, *Remarks on the long time behaviour of the solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 5-6, 883–893.

[41] Hiroyoshi Mitake and Hung V. Tran, *Selection problems for a discount degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation*, Adv. Math. **306** (2017), 684–703.

[42] Nam Q. Le, Hiroyoshi Mitake, and Hung V. Tran, *Dynamical and geometric aspects of Hamilton-Jacobi and linearized Monge-Ampère equations—VIASM 2016*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2183, Springer, Cham, 2017. Edited by Mitake and Tran.

[43] Keniti Sato, *On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 423–436.

[44] Bruno Ziliotto, *Convergence of the solutions of the discounted Hamilton-Jacobi equation: A counterexample*, J. Math. Pures Appl. (9) **128** (2019), 330–338.