髙木俊輔氏「標数 0 の特異点と F 特異点」

髙木氏は主に F 特異点について研究している．フロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点を総称して F 特異点という．F 正則特異点，F 純特異点，F 有理特異点，F 単射特異点などが F 特異点の重要なクラスであり，その起源は 1970 年代後半の可換環論に遡る．

F 特異点の研究に関しては, 渡辺敬一氏による F 有理特異点の発見 (R. Fedder との共同研究) とその後の一連の研究, 渡辺氏と原伸生氏による標数 0 の対数的端末特異点と F 正則特異点の対応, K. Smith と原氏による標数 0 の有理特異点と F 有理特異点の対応の証明など, 日本人が大きく貢献している.

このように F 特異点は標数 p への還元を通して, 標数 0 の特異点と関係があることが知られていたが, 髙木氏はこの方向で顕著な業績を挙げている. 双有理幾何学では，多様体のみを考えるのではなく，対象を多様体 X とその上の $\mathbb{Q}$ 因子 (素因子の有理係数形式和) Δ の対 (X, Δ) へと拡げることが重要であるが, 髙木氏は Smith, 原による結果の対ヴァージョンとして, 対 (X, Δ) が川又対数的端末対 (resp. 純対数的端末対) であることと, 十分大きい素数 p について標数 p への還元 (X_p, Δ_p) が F 正則対 (resp. 純 F 正則対) であることの同値性を証明した. より強く，非川又対数的端末点集合を定義するイデアルである乗数イデアルと非 F 正則点集合を定義するイデアルである判定イデアルの対応を証明した.

同様の特異点の対応の問題は, 対数的標準特異点と F 純特異点との間にもあるが, こちらは現在も未解決である. x を X の閉点とする．渡辺敬一氏は，標数 0 の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規特異点 (X, x) が対数的標準特異点であることと, 無限個の p について (X, x) の標数 p への還元 (X_p, x_p) が F 純特異点であることが同値であると予想した. 髙木氏は Mustaţă–Srinivas によって導入された弱通常性予想が正しければ，渡辺の予想も正しいことを証明した. 弱通常性予想とは, V を標数 0 の代数閉体上定義された n 次元非特異射影代数多様体とし, V_p を V の標数 p への還元としたとき, $H^n(V_p, \mathcal{O}_{V_p})$ へのフロベニウスの作用が全単射になるような素数 p は無限個存在するという予想である. また藤野修氏との共同研究において，Birkar–Cascini–Hacon-M$^{\mathrm{c}}$Kernan による極小モデル理論の進展と Ogus による曲面の通常素数 (ordinary prime) の密度に関する議論を用いることにより，（弱通常性予想を仮定せずに）3 次元以下の孤立特異点について渡辺の予想が正しいことを証明した.

また, こうした特異点の対応の問題の大域ヴァージョンとして, 髙木氏は対数的ファノ多様体及び対数的カラビ・ヤウ多様体のフロベニウス写像を用いた特徴付けについても研究していて，成果を挙げている. アフィン錐が F 純特異点 (resp. F 正則特異点) しか持たないような射影多様体を大域的 F 分裂多様体 (resp. 大域的 F 正則多様体) という. X を標数 0 の射影多様体としたとき，Schwede–Smith は, 十分大きい p について標数 p への還元 X_p が大域的 F 正則多様体ならば, X は対数的ファノ多様体であり, 無限個の p について X_p が大域的 F 分裂多様体ならば, X は対数的カラビ・ヤウ多様体であると予想した. 髙木氏はこの Schwede–Smith の予想の解決に向けて肯定的な結果を出している. 実際，權業善範氏らとの共同研究において, (i) X が森夢空間と呼ばれる極小モデル理論がうまく機能する多様体の場合. (ii) X が 2 次元の場合, の 2 つの場合に Schwede–Smith の予想が正しいことを証明した. さらに (i) の結果を用いて，標数 0 の対数的ファノ多様体を Cox 環の特異点の言葉で特徴付けることにも成功した. この Cox 環に関する結果は現在では純代数幾何学的な別証明が知られているものの, このような双有理幾何学

の深い結果が正標数の手法を用いて得られたことは, F 特異点論を用いた双有理幾何学へのアプローチの有効性を示していると言えるだろう.

Deligne–Illusie の小平の消滅定理の別証明に見られるように, ホッジ理論とフロベニウス写像を用いた正標数の技巧の間には密接な関係があるが, 髙木氏はこの方面でも業績を挙げている. Du Bois 特異点は Steenbrink によって導入された, ホッジ理論的な標数 0 の特異点であるが, Schwede は標数 0 の特異点 (X, x) が Du Bois 特異点であることと, 無限個の素数 p について (X, x) の標数 p への還元 (X_p, x_p) が F 単射特異点であることは同値であると予想した. この予想は現在のところ 2 次元の場合すら未解決であるが, 髙木氏は Bhatt–Schwede との共同研究において, Schwede の予想は上で述べた弱通常性予想と同値であることを証明した. また, 髙木氏は Srinivas との共同研究において F ベキ零特異点を定義し, 十分大きい p についてベキ零特異点であることをホッジ理論的に特徴付けた. Kollár は小平の消滅定理の拡張として, 非特異複素射影多様体上の半豊富直線束に関する単射性定理を証明したが, 髙木氏は權業氏との共同研究において, (正標数の) 大域的 F 正則多様体上でも Kollár の単射性定理が成り立つことを示した.

髙木氏はその他, 正標数の双有理幾何学に現れる特異点の研究, 代数幾何学的手法の可換環論への応用の方面においても顕著な業績を挙げている.

以上のように髙木氏は代数多様体の特異点論と可換環論において顕著な業績を多数挙げておられ, 代数学賞に大変相応しいものである.