内藤聡氏「量子アフィン代数の表現論」

内藤聡氏は, 量子アファイン展開環上の加群の結晶基底の実現をめぐる種々の問題において佐垣大輔氏との共同研究により卓越した業績をあげてきました．なかでも extremal ウエイト加群の結晶基底に対して Lakshimibai-Seshadri パス (略して LS パス) による実現を与えたこと, その応用として Kirillov-Reshetikhin-加群 (略して KR-加群) のテンソル積と Macdonald 関数との間の結び付きを与えるある種の等式「$X = P$ 定理」の統一的な証明を与えたこと, LS パスとは異なる結晶基底の幾何的実現である Mirkovic-Vilonen polytope に対する結晶構造の研究などが特筆すべき成果です．以下では LS パスをめぐる話題に的を絞って, 簡単に説明します.

$U_q(\mathfrak{g})$ を対称化可能な Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環とするとき, 1990 年代初頭, 柏原正樹氏によって, 支配的整ウェイト λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\lambda)$ 上に, 結晶基底 $\mathscr{B}(\lambda)$ が構成され, それらの結晶基底の持つ組合せ論的な性質を抽出してクリスタルの概念が得られました．柏原氏はさらに最高ウェイト加群の拡張として, 任意のウェイト λ に対する extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ を導入し, $V(\lambda)$ が結晶基底 $\mathscr{B}(\lambda)$ を持つことを示しました．結晶基底の存在は重要な結果ですが, その構成は複雑であり, 結晶基底のより具体的な実現を与えることが表現論の大きな課題となっています.

LS パス $\mathbf{B}(\lambda)$ とは Littelmann によって導入された（支配的とは限らない）任意の整ウェイト λ に対して定まるある種の区分的線形写像の集合上に構成されたクリスタルです．λ が支配的な場合には $\mathbf{B}(\lambda)$ はクリスタルとして $\mathscr{B}(\lambda)$ に同形になり (柏原, Joseph), これによって最高ウェイト加群の場合に, 結晶基底の LS パスによる実現が得られます．その一般化として extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底に対する LS パスによる実現が問題になります．以下では $U_q(\mathfrak{g})$ を量子アファイン展開環とし, λ はレベル・ゼロであると仮定します．内藤氏は佐垣氏と共に, ϖ_i $(i \in I_0)$ をレベル・ゼロ基本ウェイトとするとき extremal ウェイト加群 $V(m\varpi_i)$ の結晶基底はクリスタルとして $\mathbf{B}(m\varpi_i)$ と同形になることを示しました．さらに, 一般の λ を扱うために $\mathfrak{g}$ が untwisted アファイン Lie 代数の場合に, Littelmann による LS パスの定義を拡張して, semi-infinite LS パス（略して siLS パス）の概念を導入し, siLS パスの集合 $\mathbf{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ にクリスタルの構造を定義して任意のレベル・ゼロ支配的ウエイト λ に対する $\mathscr{B}(\lambda)$ が $\mathbf{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ とクリスタルとして同形になることを示しました．この結果は LS パスによる結晶基底の実現に関する一つの到達点とみなせる優れた結果です.

$U'_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の導来部分代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に付随する $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数, $U_q(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ に付随する部分代数とします．*KR*-加群 $W_s^{(i)}$ とは, $s \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, i \in I_0$ に対して定まるある種の $U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の族であって, 多くの場合に結晶基底を持つことが知られています．テンソル積 $W_{s_1}^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes W_{s_k}^{(i_k)}$ の $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群への分解を記述するのが Kirillov-Reshetikhin 予想で, その q-類似として考えられたのが $X = M$ 予想です. X は結晶構造を使って定義され，1 次元状態和と呼ばれています．どちらの予想も多くの

場合に確認されています．２種類のパラメータ q,t を持つ対称関数である Macdonald 多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ の $t=0$ とおいた場合の意味付けについては今まであまり知られていませんでしたが, 最近, $P_\lambda(x;q,0)$ が量子アファイン展開環の表現論と密接に関係している事実が相次いで発見され, 特に, KR-加群のテンソル積における次数付き指標 “X” が $P_\lambda(x;q,0)$ に一致することが多くの場合に, 個別の計算で確かめられました ($X=P$ 定理). 内藤氏は佐垣氏と共に $X=P$ 定理に対する $s_i=1$ の場合の統一的な証明を与えました．証明の概略は LS パスを使った X のクリスタルの記述を, (parabolic) 量子 Bruhat グラフを使って具体的に与え, 一方 $P_\lambda(x;q,0)$ は量子アルコーブ・モデルと呼ばれるクリスタルによって記述し，２種類のクリスタルの同形を示すことによって統一的証明を与えるというものです。$X=P$ 定理の証明は, 内藤-佐垣による LS パスによる結晶基底の実現の見事な応用例と言えるでしょう.

内藤氏は佐垣氏とともに, さらに $V(\lambda)$ の Demazure 部分加群に対しても, その次数付き指標と Macdonald 多項式の特殊値との関連を示す興味深い結果を得ています.

以上の様に, 内藤氏は LS パスによる結晶基底の実現を軸に, Macdonald 多項式との関連において新生面を切り開くなど, その表現論に対する貢献は大きなものがあります．また, LS-パスと量子 Bruhat グラフとの結びつきが得られて, LS-パスは組み合わせ論の研究者の高い関心を呼んでいます．さらに内藤氏は量子展開環にとどまらず, 一般 Kac-Moody 代数の表現論においても多くの業績をあげています．このように多方面にわたって優れた結果を出していることは高い評価に値するものであり, 代数学賞を受賞するにふさわしいものです.