2010年度代数学賞

都築暢夫氏「p進コホモロジーとp進微分方程式の研究」

都築暢夫氏は，標数$p > 0$の代数多様体のp進コホモロジー，またその係数の理論である収束Fアイソクリスタル，過収束Fアイソクリスタルの基礎理論の研究において，幾つもの優れた研究成果を挙げてきました．位相幾何学における特異コホモロジーの代数多様体（あるいはより一般にスキーム）における類似として，エタール・コホモロジーが知られており，数論幾何学において，Weil予想の証明をはじめ，非常に重要な役割を担っています．標数pの代数多様体に対しても，各素数lごとにl進エタール・コホモロジー（l進体やその整数環上の加群になることからこのようによばれる）が定義されますが，$l = p$の場合は振る舞いが悪く，これを補う「良い」コホモロジー論が，都築氏の研究分野であるp進コホモロジー論です．p進コホモロジー論における局所系の理論（収束Fアイソクリスタル，過収束Fアイソクリスタル）やそのコホモロジー（rigid コホモロジー）の定義は，1980年頃P. Berthelotにより与えられました．l進エタール・コホモロジーの定義やその扱い方が代数的であるのに対し，可積分接続付き加群やそのde Rham複体を基礎とするp進コホモロジー論はp進解析的で，その扱いはl進エタール・コホモロジーより一般に難しく，その基本性質を明らかにすることが主な研究課題となってきました．

都築氏は，まず曲線上のunit-root F収束アイソクリスタルとそれに伴うsmoothなp進エタール層について精力的に研究しました．一般に標数pのsmoothな代数多様体上では，Riemann–Hilbert対応の類似として，smoothなp進エタール層の圏とunit-root収束Fアイソクリスタルの圏の間に自然な圏同値があります．ここで，unit-root収束Fアイソクリスタルは，局所的には，フロベニウス構造の入った接続付き加群でフロベニウス自己準同型の「固有値」がp進単数であるものとして記述されるものです．収束アイソクリスタルは，特異点の近傍での局所解の収束半径にある種の条件をつけないと，p進コホモロジーの観点からは良い係数理論とならないことが知られており，この条件を課したものは過収束アイソクリスタルと呼ばれています．都築氏は，unit-root過収束Fアイソクリスタルの圏がunit-root収束Fアイソクリスタルの圏の忠実充満部分圏になること（N. Tsuzuki, The overconvergence of morphisms of étale ϕ-∇-spaces on a local field. Compositio Math. 103 (1996), no. 2, 227–239），そしてunit-root収束Fアイソクリスタルが過収束になることと対応するp進エタール層の局所モノドロミーが有限になることとの同値性（R. Crewの予想）（N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve. Amer. J. Math. 120 (1998), no. 6, 1165–1190. 階数1の係数の場合はCrewの結果），さらにp進エタール層の局所モ

ノドロミーの Swan 導手と対応する unit-root 過収束 F アイソクリスタルの p 進微分方程式の非正則指数が一致するという，Galois 表現の分岐と p 進微分方程式の非正則性を結びつける興味深い結果（N. Tsuzuki, The local index and the Swan conductor. Compositio Math. 111 (1998), no. 3, 245–288. 階数 1 の係数の場合は松田茂樹の結果）などを示しました．最初の 2 つの結果は，後に一般の smooth な代数多様体へ拡張しています（N. Tsuzuki, Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals. Duke Math. J. 111 (2002), no. 3, 385–418）．

その後，都築氏は rigid コホモロジーの基本性質の研究を進めますが，特筆すべきものとして，rigid コホモロジーの proper descent （N. Tsuzuki, Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings. Invent. Math. 151 (2003), no. 1, 101–133）が挙げられます．この定理により，特異点を許した一般の代数多様体の定数係数の rigid コホモロジーを，特異点のない代数多様体の定数係数の rigid コホモロジーで記述することが可能となり，特に rigid コホモロジーの有限性，フロベニウスの同型性が従います．有限性等は，その後 K. Kedlaya や志甫淳により過収束 F アイソクリスタルを係数にもつコホモロジーについて研究されています．最近，都築氏は D. Caro と共同で，より一般の係数理論である数論的 $\mathcal{D}$ 加群のコホモロジー関手での振る舞いを研究しています．複素数体上の $\mathcal{D}$ 加群の標数 p での類似として P. Berthelot の F-$\mathcal{D}^\dagger$ 加群の理論があります．$\mathcal{D}$ 加群の holonomic という基本概念は F-$\mathcal{D}^\dagger$ 加群に対しても定義されますが，非常に扱いが難しく，もう少し扱いやすい overholonomic という概念が Caro により定義されていました．彼らは，最近の K. Kedlaya の過収束 F アイソクリスタルの潜在的半安定性定理を用いて，過収束 F アイソクリスタルは overholonomic であることを示し，その系として overholonomic な F-$\mathcal{D}^\dagger$ 加群の「Grothendieck の 6 つのコホモロジー操作」での安定性を示しました（D. Caro and N. Tsuzuki, Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties, arXiv:0803.2105）．K. Kedlaya の非常に強力な定理に依存してはいますが，overholonomic と holonomic の一致の問題を除いて（フロベニウス付きの）p 進コホモロジー論を完成させた決定的な仕事といえます．

p 進コホモロジー論は，その基礎理論の確立に伴い，数論幾何学にあらわれる p 進的性質・現象の研究において今後ますます有用になることが期待されるものであり，この分野における都築氏の数多くの優れた業績は，代数学賞を受賞するにふさわしいものです．