2009年度代数学賞

雪江明彦氏「概均質ベクトル空間の数論的・幾何学的研究」

雪江明彦氏は，概圏質ベクトル空間の軌道の研究とその数論への応用に関して，優れた幾何学的方法を数多く提案し，概均質ベクトル空間のゼータ関数の解析に応用することによって，数論的な密度定理を得るなど，概均質ベクトル空間の理論およびその数論的応用の研究を大きく飛躍発展させせました.

体 k 上定義された線形代数群 G が作用する概均質ベクトル空間 V を考えると，閉体 $\overline{k}$ 上で見た場合 V は単一の開軌道（生成点）をもっているわけですが，有理軌道（rational orbit），つまり $G(k)$ の $V(k)$ における開軌道（Zariski 稠密軌道）を記述することは重要かつ困難な問題です．連作 “Prehomogeneous vector spaces and field extensions” I. (D. Wright との共著）Invent. Math. 1992; II. (A. Kable との共著）Invent. Math. 1997; III. J. Number Theory 1997 において，雪江氏は１３個の概均質ベクトル空間に対して有理軌道を決定しました．多くの場合，有理軌道の集合から５次以下の多項式の分解体の同型類への自然な写像が構成されて，しかも個々の同型類に写される有理軌道が具体的に記述できる，というのが主要結果です，これは概均質ベクトル空間の有理軌道を調べることによって 2, 3, 4, 5 次拡大体の密度定理（判別式の絶対値が T 以下の拡大体の個数 $N(T)$ の漸近挙動）が得られる可能性を示唆するものであり，その後の雪江氏の研究の出発点となりました，

さて概均質ベクトル空間の軌道の情報は，ゼータ関数の係数にエンコードされます．直接関係するのは有理軌道ではなくて整軌道（integral orbit）です．整軌道の情報から有理軌道の情報を引き出す方法として，D. Wright が考案した filtering process がありますが，その方法を実行するにはゼータ関数の解析的性質について詳細な情報が必要で，そのためには開軌道でない有理軌道の考察が不可欠です．著書 “Shintani zeta functions”, London Math. Soc. Lecture Note Series 183 (1993) において，雪江氏は幾何的不変式論 (GIT) の立場から軌道を考察し，ゼータ関数の解析的性質を有理軌道の Morse stratification を用いて研究する一般的プログラムを提案するとともに，４次拡大体に対応する概均質ベクトル空間の場合にこのプログラムを膨大な計算により実行，ゼータ関数の主要部を決定しました．またこの結果に基づき，２つの素点での条件を付した４次拡大の個数の密度を決定し，素点での条件をつけない場合についての予想を提出しました（$k = \mathbb{Q}$ の場合は 2005 年 M. Bhargava が解決）．３次体に関する B. Davenport–H, Heilbronn および B. Datskovsky–D. Wright の結果からの大きな前進です.

その後雪江氏は，２変数エルミート形式の対がなす概均質ベクトル空間に対しても一般的プログラムを実行し，A. Kable との共著 “The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields”, I: Tohoku Math. J. **54** (2002); II: J. Math. Soc. Japan **55** (2003); III: J. Number Theory **99** (2003) において，与えられた２次拡大を含む $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 拡大について，類数と単数基準の積の密度を与えました．こちらは２次拡大に対する結果（D. Goldfeld と J. Hoffstein）の拡張です．

概均質ベクトル空間のうち最も複雑なものは５次拡大に対応するものです．A. Kable 氏との共著になる連作 “On the space of quadruples of quinary alternating forms”, J. Pure Appl. Algebra **186** (2004), “A construction of quintic rings”, Nagoya Math. J **173** (2004), “On the number of quintic fields”, Invent. Math. **160** (2005) においては，５次の交代行列４個の組のなす概均質ベクトル空間の整軌道から整数環上５次の環の同型類への対応を構成し，２変数３次形式から３次の環を構成する B.N. Delone–D.K. Faddeev の結果を大きく一般化しました．この構成とゼータ積分の収束域の決定により，５次体の個数の判別式による評価が得られました．

以上に述べてきた系列とはやや色彩を異とするものとして，雪江氏には概均質ベクトル空間とエルゴード理論のかかわり合いに関する仕事があります．不定値二次形式の整数点での値に関する Oppenheim 予想を，Margulis はエルゴード理論の問題と解釈して証明しました．雪江氏の論文 “Prehomogeneous vector spaces and ergodic theory”, I : Duke Math J. **90** (1997); II: Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000) [joint with D. Witte, R. Zierau]; III. J. Number Thory **70** (1998) では，Margulis の解釈を対称行列のなす概均質ベクトル空間についての命題と再解釈したうえで，Margulis 理論を一般の概均質ベクトル空間に拡張せよという問題を提出しました．いくつかの場合には自ら拡張を実行し，概均質ベクトル空間に関係して現れる高次形式について数論的結果を得ました．また直近の仕事では，対称行列のなす概均質ベクトル空間を用いて正規化されない玉河数の密度を研究しています（N. Hayasaka and A. Yukie, “On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups. I”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008)).

新谷卓郎氏が創始した概均質ベクトル空間による数論研究に関して，雪江氏は幾何学から優れた方法を導入し，当初の予想を超える多くの深い結果を示すことで，分野全体を大きく発展させました．代数学賞を受賞するにふさわしい業績です．