2009年度代数学賞

小木曽啓示氏「一般化されたカラービ・ヤウ多様体の研究」

小木曽氏は K3 曲面・楕円曲面の研究から出発し，その高次元版である広義のカラービ・ヤウ多様体の研究に進みました．これらの多様体は数論・群論・複素幾何学といった数学の諸分野とかかわるだけでなく，数理物理学とも密接に関係する重要な研究対象です．

小木曽氏の研究成果に共通する特徴は，一般論を展開するだけではなく個々の対象を深く掘り下げ，美しく興味深い現象を探求，発見していることです．氏が研究してきた分野はきわめて多岐にわたりますが，主要なものを分類すると，1) 楕円曲面の Mordell–Weil 格子，2) K3 曲面の自己同型群，3) 狭義のカラービ・ヤウ多様体，4) K3 曲面のフーリエ・ 向井パートナー，5) ハイパーケーラー多様体になろうと思われます．以下上記５種類のトピックスについて，簡単に解説します．

1) 楕円曲面の Mordell–Weil 格子：塩田徹治氏は1990年代初頭，楕円曲面の切断がつくる有限生成アーベル群に自然な内積を導入して， Mordell–Weil 格子理論を確立しました．なかでも最も単純かつ基本的なのが有理楕円曲面の Mordell–Weil 格子で，その完全な記述は小木曽氏と塩田氏との共著 “The Mordell–Weil lattice of a rational elliptic surface”, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40** (1991) で得られました．現在に至るまで内外の研究者に頻繁に引用されている基本的文献です．

2) K3 曲面の自己同型群：この話題に関する小木曽氏の論文は１０篇近くありますが，代表的なものとして，K3 曲面の射影的な変形によって自己同型群がどう変動するかを明らかにした “Local families of K3 surfaces and applications”, J. Algebraic Geom. **12** (2003) があります．この論文では，射影的 K3 曲面に非自明な射影的変形を施すと，自己同型群が無限群となる K3 曲面が必ず稠密にあらわれる，という驚くべき事実が指摘されました．

3) 狭義のカラービ・ヤウ多様体：微分幾何学的には単連結な n 次元リッチ平坦多様体で $U(n)$ ホロノミー 群をもつものが狭義のカラービ・ヤウ多様体です（弦理論で問題とされたのは $n=3$ の場合）．この方面における小木曽氏の初期の仕事は，３次元カラービ・ヤウ多様体に入るファイバー空間構造の大まかな分類を与えた一連の研究で，その業績により氏は 1998 年度建部賞を受賞しています．また “Two remarks on Calabi–Yau Moishezon threefolds”, J. Reine Angew. Math. **452** (1994) では，$\mathbb{P}^5$ 内の $(2,4)$ 完全交差多様体 X と任意の自然数 d を与えると，X に含まれる次数 d の $\mathbb{P}^1$ で負の法束をもつものがあること，この X に双有理型変換を施すことにより，どんなケーラー多様体とも同相でない Moishezon 多様体ができること，を示しました．Nam-Hoon Lee 氏との

最近の共同研究では，滑らかな変形をもたず互いに双有理な二つの３次元 Calabi–Yau 多様体であるが，互いに同相ではなく，しかし平坦な変形ではつながっているという例があることを，Hartshorne の古い定理を用いて示しています．上のような結果は，簡単そうな多様体に潜む，ある意味で病理的でありつつ，反面では非常に興味深い現象を発見したものであって，小木曽氏の数学の特徴を如実に表すものといえます．

4) K3 曲面のフーリエ・向井パートナー：Kontsevich が提唱したホモロジー・ミラー対称性は，広義のカラービ・ヤウ多様体の研究に新たな視点を付け加えました．その枠組みでは，多様体 X そのものよりも，X 上の連接層の複体からできる導来圏 $\mathcal{D}(X)$ が本質的です．$X_1, X_2, \ldots$ が互いにフーリエ・向井パートナーであるとは，$\mathcal{D}(X_i)$ が互いに同値であることをいいます．小木曽氏は "K3 surfaces via almost-primes", Math. Res. Lett. **9** (2002) で，向井や Orlov の導来圏の理論を Iwaniec の疑素数 (almost prime number) 理論と結びつけ，フーリエ・向井パートナーの個数が無限に増大していくような K3 曲面の列があることを証明しました．この研究を機縁として，小木曽氏は細野忍，B.H. Lian，S.-T. Yau ３氏と Harvard での共同研究を開始します．これらの共著論文のうち "Kummer structures on K3 surface: an old question of T. Shioda", Duke Math. J. **120** (2003) では，クンマー曲面からもとのアーベル曲面は復元できるかという問題に対する否定的完全解決を与え，"Autoequivalences of derived category of a K3 surface and monodromy transformations", J. Algebraic Geom. **13** (2004) では K3 曲面 X に対して $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ の向井格子への表現を（指数２の不確定性を除いて）決定しました（この不確定性は後に Huybrechts らが解決）．

5) ハイパーケーラー多様体：ハイパーケーラー多様体（リッチ平坦でホロノミーが $Sp(2n)$）は複素シンプレクティック多様体とも呼ばれ，広義カラービ・ヤウ多様体の基本構成要素のひとつです．小木曽氏の最近の仕事は主にこのクラスに関するもので，McMullen の複素力学系の仕事に触発された，位相的エントロピーと自己同型群の関係についての結果や，正則なラグランジアン・ファイバー空間（アーベル多様体が一般ファイバーとなります）を変形したときの Mordell–Weil 群のふるまいの研究，といった著しい成果が次々にあがっています．一例をあげると，ラグランジアン・ファイバー空間の一般ファイバーのピカール数は常に１であるという定理は，結果も意外ですし，松下大介と C. Voisin 両氏によるファイバー空間構造の変形法を比較するという証明法も斬新です．

以上のように，代数幾何学における最も基本的な研究対象である広義カラービ・ヤウ多様体に関し，小木曽氏は重要で多彩な結果を次々と発表しており，国際的にきわめて高く評価されています．代数学賞にふさわしい業績であり，また今後のさらなる発展がまたれるところです．