2008年度代数学賞

谷崎俊之氏 「リー代数と量子群の表現の研究」

谷崎氏は，複素半単純リー代数の表現論を中心として，関連する量子群，Kac–Moody リー代数やアフィン Hecke 代数の表現論など，表現論の多岐にわたる分野において卓越した業績をあげてきました．なかでも柏原正樹氏との共同研究で，代数解析的手法にもとづきアフィン・リー代数に関する Kazhdan–Lusztig 予想を証明したこと，最近では Beilinson–Bernstein 対応が量子群についても成立することを示したことが，特筆すべき成果です．以下では谷崎氏の研究の中心的なテーマである Kazhdan–Lusztig 予想とその周辺の話題に的を絞って説明します。

複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現論における基本的問題は，最高ウエイト λ が定める既約 $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda)$ の指標決定ですが，1970 年代 Kazhdan と Lusztig は，ワイル群 W の Kazhdan–Lusztig 多項式を用いると，反支配的ウエイト λ と W の元 w に対し，$L(w \cdot \lambda)$ の指標が種々の $y \in W$ に関する Verma 加群 $M(y \cdot \lambda)$ の指標の線形結合として明示的に書けると予想しました．$M(y \cdot \lambda)$ の指標は計算できるので，予想が正しければ既約 $\mathfrak{g}$ 加群の指標が決定できます．Kazhdan–Lusztig 予想は，柏原–Brylinski と Beilinson–Bernstein とが独立に，代数解析手法により問題を $\mathfrak{g}$ の旗多様体 X 上の $\mathcal{D}_X$ 加群の言葉に翻訳することによって解決しました．その過程で証明された「自明な中心指標を持つ有限生成 $\mathfrak{g}$ 加群のなすアーベル圏は，X 上の連接 $\mathcal{D}_X$ 加群のなすアーベル圏と圏同値になる」という事実が Beilinson–Bernstein 対応と呼ばれるものです．

正標数の半単純代数群の既約指標に関しても Lusztig は類似の予想を提示していたのですが，複素半単純リー代数の場合が解決すると，彼は予想をアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ やパラメータ q が 1 の巾根の場合の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現にまで拡張し，アフィン・ワイル群に関する Kazhdan–Lusztig 多項式を用いてそれらすべてを統一的に定式化しました．またこれらの表現の圏を比べることで，G に関する Kazhdan–Lusztig 予想を $\widehat{\mathfrak{g}}$ についての予想に帰着させる構想 (Lusztig プログラム) を 1980 年代後半に発表，以後 Lusztig プログラムの完成が表現論の最重要課題となります．

谷崎氏は M. Kashiwara and T. Tanisaki: *Kazhdan–Lusztig conjecture for symmetrizable Kac–Moody Lie algebras II* (Progress in Math. **92** Birkhaüser 1990) に始まる柏原氏との共同研究により，$\widehat{\mathfrak{g}}$ を含む種々の状況における Kazhdan–Lusztig 予想の解決に成功しました．上記論文では対称化可能な Kac–Moody リー代数に対しての Kazhdan–Lusztig 予想，すなわち，支配的正則ウエイト λ に対し $M(w \cdot \lambda)$ の指標が Kazhdan–Lusztig 多項式を用いて $L(y \cdot \lambda)$ の指標の線形結合として表示されること，が示されています．証明には無限次元旗多様体上定義され有限余次元の Schubert 多様体に台を持つ左 $\mathcal{D}$ 加群と，

無限次元スキーム上の混合ホッジ加群を用います．さらに、*Kazhdan–Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II*, Duke Math. J. 1996 では，Lusztig プログラムで必要とされるアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対する Kazhdan–Lusztig 予想を解決しました．今度は反支配的正則ウエイト λ に対し $L(w\cdot\lambda)$ が $M(y\cdot\lambda)$ の線形結合として表され，有限次元 Schubert 多様体に台をもつ右 $\mathcal{D}$ 加群が使われます．この第二論文とほぼ同時期に Kazhdan–Lusztig が $U_q(\mathfrak{g})$ と $\widehat{\mathfrak{g}}$ の間の圏同値を証明し，Andersen–Jantzen–Soergel が G と $U_q(\mathfrak{g})$ の表現を（標数が十分大きいとき）関連づけたので，谷崎氏の仕事とあいまって Lusztig プログラムはおおむね完成したのでした．

以上に関連して谷崎氏は柏原氏との共著論文で，対称化可能な Kac–Moody リー代数のワイル群に付随する放物的 Kazhdan–Lusztig 多項式の幾何学的実現を，Schubert 多様体の交差コホモロジーを用いて与えました．ここから放物的 Kazhdan–Lusztig 多項式の係数が正の整数であることがわかります．Kazhdan–Lusztig 多項式の係数については一般的な予想がありますが，柏原・谷崎は現在のところ最も一般的な結果です．

谷崎氏の最近の注目すべき成果は，Beilinson–Bernstein 対応の量子群への一般化です．半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随した旗多様体 X と $\mathcal{D}_X$ 加群の圏の q 類似として，量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に付随した量子旗多様体 X_q とその上の $\mathcal{D}$ 加群の圏が Luntz–Rosenberg により導入されました．ここでは q は超越元とします．量子旗多様体は「非可換射影的スキーム」であり，具体的には $U_q(\mathfrak{g})$ の双対 Hopf 代数の次数付き部分代数上の次数付き加群の圏をねじれ部分圏によって割った商として定義されます．また X_q 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏とは，X_q 上の q 差分作用素の環 $\widetilde{D}$ 上のある種の次数付き加群の圏をねじれ部分圏で割った商です．Luntz–Rosenberg は，Beilinson–Bernstein 対応の q 類似として，X_q 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏と $U_q(\mathfrak{g})$ の商に対する加群の圏とが圏同値であることを予想しました。

$\widetilde{D}$ は定義によって非常に大きな代数になり，扱いが難しいのですが，谷崎氏は $\widetilde{D}$ をより扱い易い部分代数 D で置き換えて X_q 上の $\mathcal{D}$ 加群の圏を再定義することで，Luntz–Rosenberg の予想 (の変形版) を証明しました (T. Tanisaki: *The Beilinson–Bernstein correspondence for quantized enveloping algebras*, Math. Z. 2005; 通常の旗多様体の場合， $\widetilde{D}$ から構成しても， D から出発しても，$\mathcal{D}_X$ 加群の圏は互いに同値になります).

Beilinson–Bernstein 対応のさらなる拡張として，q が 1 の巾根の場合の量子群についても，谷崎氏は精力的に研究を進めています．Bezrukavnikov–Mirkovic–Rumynin が示した，正標数のリー代数の表現から定まる導来圏と旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群の導来圏との同値性 (Beilinson–Bernstein 対応の導来圏版) に想を得たもので，各方面の注目を集めています．

以上のように、谷崎氏は一貫して Kazhdan–Lusztig 予想，Beilinson–Bernstein 対応という，表現論の最も本質的な問題に果敢に挑戦し，卓越した業績を挙げています，これらの結果を中心にリー代数，量子群の表現論への氏の貢献は多大であり，代数学賞を受賞するにふさわしいものです．