2008年度代数学賞

並河良典氏「3次元Calabi–Yau多様体と正則シンプレクティック幾何」

並河氏は自明な標準因子をもつ多様体，特に3次元 Calabi–Yau 多様体と高次元正則シンプレクティック多様体の研究において顕著な業績をあげてきました．複素代数多様体は一般に複雑な構造をもっていますが,「極小モデルプログラム」という自然な手順を踏むと，標準因子が正，自明，負という3種の多様体に分解すると考えられています．このうち自明な標準因子をもつ代数多様体，より一般には自明な標準因子をもつケーラー多様体は，さらに3種類の基本要素に分解できます (Bogomolov 分解)．3種とは複素トーラス，Calabi–Yau（以下では略して CY）多様体，正則シンプレクティック（以下では正則を省略）多様体で，このうち幾何学的にも興味深い後2種が並河氏のフィールドです,

2次元では CY もシンプレクティックも同じ $K3$ 曲面です．$K3$ 曲面とその変形の理論は豊かな内容をもち，当然その高次元化が期待されますが，3次元以上になると，これら2種には共通部分がありませんし，性質も大きく異なります．また極小モデル理論を考えると，特異点をもつ場合をも扱う必要がでてきます．並河氏は特異点付き CY 多様体，シンプレクティック多様体の変形理論を研究し，特にスムージングに関して決定的な結果を証明しました．最近ではリー環の随伴軌道の閉包について，そのシンプレクティック特異点解消を分類しポアソン変形を考察するなど，研究の幅を広げつつあります.

並河氏の業績の第一は，3次元 CY 多様体のスムージング理論です．3次元 CY 多様体は $K3$ 曲面の3次元版としてのみならず，数理物理の弦モデルにおけるコンパクト化の材料として，多方面から関心をもたれています．代数幾何からしても物理理論からいっても，端末特異点を許して考えるのが自然なのですが，そのために変形論はかなり複雑になってしまいます．$K3$ 曲面の場合，変形の障害空間（接束の第2コホモロジー）が消えるため，変形空間は必然的に非特異でした．しかし3次元以上になると一般に障害空間は消えません．それにもかかわらず，特異点のない CY 多様体の変形空間はスムーズであることが，微分幾何的手法で示され (Bogomolov, Tian, Todorov)，T^1 持上げとホッジ理論を用いると代数的に証明することもできます（Z. Ran).

川又雄二郎氏との共著 *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi–Yau varieties*, Invent. Math. 1994 において，並河氏は Ran の議論を対数幾何の思想で洗練し，3次元単純正規交叉多様体 が非特異な CY 多様体に平坦変形（スムージング）できるための十分条件を与えました．これは R. Friedman が曲面で得ていた結果の飛躍的拡張で，3次元 CY 多様体がミラー対称性で脚光を浴

びていたこととあいまって大きな注目を集めました．一方同じ年発表の Y. Namikawa: *On deformations of Calabi–Yau 3-folds with terminal singularities*, Topology 1994 に始まる一連の論文（Steenbrink 氏との共著 Invent. Math., 1995 を含む）では，端末的特異点のみをもつ３次元 CY 多様体がスムージング可能である条件を決定しました．たとえば $\mathbb{Q}$ 分解的な特異点しかなければ可能です．この定理のひとつの応用は Bogomolov 分解の一般化で，小平次元０の３次元非特異射影的多様体は適当なエタール被覆をとると，a) 単連結，あるいは b) $K3$ 曲面と楕円曲線の直積に双有理同値，あるいは c) アーベル多様体に双有理同値のいずれかになる，というものです．

端末特異点よりも広いクラスである標準特異点を許した 3 次元 CY 多様体の変形やスムージングも，興味ある問題です．一般には未解決なのですが，並河氏はこの問題に関して数理物理の文脈から提出された Morrison–Seiberg 予想を解決しました (Y. Namikawa: *Global smoothing of Calabi–Yau threefolds, II*, Compositio. 2001).

３次元 CY が一段落すると，並河氏の研究対象は高次元シンプレクティック多様体に移りました．ここでも特異点が問題となります．商やモジュライとして自然に得られるシンプレクティック多様体は，多くの場合特異点をもつので，非特異なものを得るにはシンプレクティック特異点解消をするか，変形でスムージングする必要があります．例えば O'Grady は，ベクトル束のモジュライとして現れる 10 次元特異シンプレクティック多様体から，前者の方法によって非特異シンプレクティック多様体の新種を構成しました．並河氏はまず特異点つきの変形理論と周期写像の基礎を固め，次いでスムージングの問題に取り組んで，シンプレクティック特異点つきシンプレクティック多様体 X に対する以下の命題 a) b) が同値であることを証明しました (Y. Namikawa: *On deformations of $\mathbb{Q}$-facorial symplectic varieties*, Crelle J. 2006).

a) 非特異シンプレクティック多様体による特異点解消 $f: Y \to X$ がある
b) X は (平坦) 変形でスムージング可能

実をいうと証明時点では，X についてひとつ仮定がついていたのですが，一般型多様体に対する極小モデル予想が解決した現在，仮定はもはや不要です．証明のポイントは，$\mathbb{Q}$ 分解的端末特異点つき正則シンプレクティック多様体 Y の変形が全て局所的に自明という，3 次元 CY の場合とは正反対の事実です．

現在並河氏が研究しているのは，冪零軌道から得られるシンプレクティック特異点です．半単純リー群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ への随伴作用を考え，$\mathcal{O}$ を一つの冪零軌道とすると，閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ の特異点は全てシンプレクティックになります (Panyushev)．このような特異点がいつシンプレクティック多様体によって特異点解消できるかを，並河氏は決定しました．B. Fu は $\overline{\mathcal{O}}$ のシンプレクティック特異点解消がみな Springer 射（適当な放物部分群 P に対する等質空間の余接束 $T^*(G/P)$ からの自然な射）であることを証明していました．並河氏は Springer 射に対する A, D, E 型向井フロップの概念を導入し，$\overline{\mathcal{O}}$ のシンプレクティック特異点解消を一つ与えると，どんなシンプレクティック特異点解消も，

もととなるものに A, D, E 型向井フロップを何度か施すことによって得られること，それらの特異点解消が互いに変形で移り合うことを示しました (Y. Namikawa: *Birational geometry of symplectic resolutions of nilpotent orbits*, Adv. Stud. Pure Math., 2006)．かならずしも双有理的でない一般の Springer 射に対しても並河氏は類似の結果を得ています．

以上のように変形理論・特異点理論を自明な標準因子をもつ多様体のクラスで高度かつ有用に展開した並河氏の業績は，代数学賞にふさわしいものです．