

「トポロジーの絵本」

G. K. フランシス 著， 笠原皓司 監訳 ・ 宮崎興二 訳

シュプリングー・フェアラク東京（株）

このような人を数学の演奏家と言うべきであろうか？ 著者の G.K. フランシス氏は、難解なトポロジーの理論を、どのようにすれば視覚的に見える形で表現できるかということと、絶え間ぬ努力によって追求し、一つの独特な世界を作り上げている。音楽家は内面から沸き起こる音楽を五線譜に書き表し、それを演奏家が楽器を奏でることによって、聞こえる音として多くの人々に感動を伝える。数学者は沸き起こる数学を論文に著すが、その感動を多くの人々に伝える良い方法が存在しない。そのため数学者は、一般の人々からは分けのわからないことをやっているだけという印象を持たれ、社会から孤立する。それでも世の中全体に、精神的なものに価値を求める意識があれば、その存在価値も認められるが、産業が発達し、物質的豊かさと現実主義的な意識が高まると、数学に価値を見いだすことは、青野にあって枯れ草をはむようなものと言われるだけとなる。その枯れ草が、実はあふれるほどの豊かな水をたたえているということと、多くの人々に伝えようと、著者は図形科学の技術を取り入れ、トポロジカルな図形が、最も美しくわかりやすく見える位置を考察し、フリーハンドで図を描いていく。著者の「これらの図形をそれぞれが持っている解析的な起源から切り離して“ゴム膜の幾何学”で説明することは、数学の一体性に対するひどい仕打ちである」という言葉は、著者の図形に対する愛と情熱を表している。

さて、本文を見ていこう。第1章の「図法トポロジー」という言葉は、本書の内容を一言で表すために、図法幾何学にちなんで用いられた著者の造語である。この章では、図形を描く上での基本的な考え方が紹介されている。 $z = xy$ という式で表される鞍形曲面の様々な見方が紹介され、続いてホイットニーの傘が紹介される。多くの読者はここまで読んだところで、「何が書いてあるかよくわからない」という気持ちになるであろう。曲面の埋め込みとはめ込みや、正則点と非正則点のことが、専門用語、日常用語、そして著者の造語とも言うべき修辭的な言葉で表現されている。3次元トポロジーの専門家なら、そこに何が書いてあるか、またはそこに何を書こうとしているかが理解できるが、そうでない人々にとっては「さっぱりわからない」という気持ちになるかもしれない。きちんとした数学の言葉で表現するためには、かなり高度な知識が必要であり、それをあの手この手で表現しようとするのだから、専門家が読んでも「???’’と思う部分もある。しかしここで思い出してほしいのは、この本は「絵本」であり、読む本ではなく「見る本」ということである。そのため、本文に書いてあることが少々わからなくても、またはさっぱりわからなくても、絵を見て何らかの魅力を感じることができれば十分である。この本全般を

通してこのようなことは、至る所に見られるので、そのたびにこれは「見る絵本」であることを思い出して、読み進んでほしい。

次の第2章は、ラインパターン、プロフィリング、ラインドロ잉、そして明暗表示（仕上げ）という描き方の基本技術が、いくつかの例とともに紹介される。また第3章は、透視図法（遠近法）の説明である。視線の焦点がどこにあるか、また無限遠点をどこにするかによって、描写する対象の位置関係などが決まり、立体感（遠近感）のある描写となる。もちろん、透視図法は射影幾何学と深い関わりがあり、複比（非調和比）の不変性の考察などがあるが、あまり深く考え込まずに、立体感や遠近感を出すにはどのように描けばよいかと言うことを、絵を見て感じ取ることが大切であろう。

さて、第3章までが本書の基礎トレーニングであり第4章～第8章で、それらの様々な応用が述べられる。第4章では第3章で述べられた透視図法を利用した錯視とも言うべき奇妙な組み木の絵が紹介される。これはペンローズの三角組み木として有名であるが、本章では、単に見ていて奇妙な気持ちにさせられるというだけでなく、実はこの三角組み木が、3次元トーラスと呼ばれる3次元多様体の中で数学的に実現されるということ、理論と絵を用いて説明する。評者はこのとき改めて、3次元多様体の不思議を感じさせられた。

第5章は高次元空間の影というタイトルであるが、話題の中心は射影平面の3次元空間へのはめ込み問題である。メビウスの帯の縁に2次元円板を張り合わせると、どのような曲面が得られるか？という問いがメビウスよりなされて以来（1867）、多くの研究者がその写実的な描画や、解析的な表示に取り組んだ。そして20世紀初頭にボーイが、そのような曲面の3次元空間へのはめ込みを構成することに成功した。はめ込みというのは、自己交差があってもよいが、折れ曲がりや尖りが無いように滑らかに空間へ曲面を入れることである。私は学生時代ある本で、「射影平面の3次元空間へのはめ込み」という解説の付いた「ボーイの曲面」の見取り図を見たことがある。今、京都産業大学にいる山田修司さんのアパートだったので、2人でああでもないこうでもないと言いながら、その見取り図に似た形の射影平面を構成しようとして、なかなかうまくいかなかったことを覚えている。そのボーイの曲面に様々な歴史的背景があり、さらに最近（1984）、この曲面を表す代数方程式が発見されたことを、本書で始めて知った。

このように、第5章は射影平面の3次元空間へのはめ込み問題を扱ったが、次の第6章は球面の3次元空間へのはめ込み問題を扱う。3次元空間に埋め込まれた球面は、途中、はめ込みを維持したままで裏返すことができるか？という問題である。これはスメイルの正則ホモトピーの理論（1957）により、理論的に可能であるということが示されるが、実際にその変形過程（正則ホモトピー）を構成してみせることは、きわめて困難で根気のいる作業である。幸いにも、1995年にミネソタ大学の Geometry Center から、「Outside In」という球面の裏返しビデオが発売され、視覚的にはずいぶん理解しやすくなったが、本書の原本が出版された時点では、まだそのようなビデオはなく、紙面上でわかりやすく

説明するための様々な工夫がなされている。球面の裏返し方法は、いくつか知られているようであるが、まずはじめに、シャピロによる裏返し方法が紹介される。それは、ボーイの曲面の2重被覆空間としての球面のはめ込みを構成することから始まる。このあたりも、かなり専門的な知識が必要なので、よくわからなくても気にせず読み進もう。その他、フィリップスとプチによる裏返し、モーリンによる裏返し方法が紹介される。モーリンという人は盲目だそうであるが、その空間的直感力は、盲目であるが故に増幅されているのであろうか。このように、いくつかの球面の裏返し方法が紹介されるが、ここを読まれた方は、是非、球面の裏返しビデオも見られることをお勧めする。

第7章は、「群を描く」と題して、曲面の写像類群と組ひも群の視覚化が紹介されている。組ひも群については、もともと組ひもというものがあるので、視覚化についてはそれほど驚きはないが、曲面の写像類群については、論文では分かりづらいことが、本書の描画によって、一目瞭然という気持ちにさせられる。続く第8章は、8の字結び目が張るザイフェルト曲面と、その補空間の視覚化である。本書の横帯に、「メビウスの帯、クラインの壺から、サーストンの論文の挿絵まで」とあるが、この8の字結び目に関する様々な描画が、サーストンの論文の挿絵である。8の字結び目の補空間には、種数1の曲面をファイバーとするファイバーバンドル構造が入ることが知られているが、その構造を視覚的に見えるように描き表すことに、第8章のほとんどが費やされている。そのため、ここでもかなり専門的な記述が現れるが、細かいことは分からなくても、曲面が時々刻々と変化していく様子や、変形不可能と思えるような2つの曲面が、実は変形可能であるということ、絵で見て感じ取っていただければ、著者の目的は十分達せられたことと思う。

以上、駆け足で本書を概観したが、視覚的にわかりやすく表現することが、数学を理解する上でいかに重要であるかということ、本書を読んで改めて認識させられた。評者が学生時代、中学生向けの塾講師をしていた頃、0.2mmのプラバン（プラスチック製の板）や、0.5mmのプラバンを用いて曲面や多面体を作り、生徒に見せたり、正20面体を作って生徒に配ったことがある。いくら口で言っても怪訝な顔をしている生徒たちが、実物を見せたとたんに、心底納得してくれるという経験を何度もしたが、論より証拠という考えは、数学教育や数学の普及においては極めて重要である。著者は、本書に掲載された図を、チョークで黒板に描くときや、OHPシートに描くときの留意点などにも言及している。コンピュータの発達で、これらの一部分は、数式処理ソフトや、コンピュータグラフィックスソフトで描画されるであろうが、著者がフリーハンドで描き続けた価値はいささかも衰えることはない。トポロジーの専門家、非専門家にかかわらず、とりわけ数学教育に携わる人々に読んでほしい、否、見てほしい「絵本」である。

森元勘治（甲南大学理工学部）