

書 評

パズルでめぐる奇妙な数学ワールド
イアン・スチュアート著, 伊藤文英訳

お茶の水女子大学 萩田 真理子

4人の盗賊が戦利品の山に目を輝かせています。札束の分配を終え、あとは宝石の山分けです。しかしどのように分配すれば、誰からも文句が出ないようにできるのでしょうか？

本書では様々なパズルを、このような魅力的な物語に仕立てて解説してくれます。

著者イアン・スチュアートは、リー代数などを専門とする数学者ですが、研究だけでなく数学の啓蒙活動にも熱心で、さまざまな一般向けの著書を持ち、また「クリスマス講演」など多くの市民向けの講演も行っています。

彼は16歳のころ、サイエンティフィック・アメリカン誌でマーティン・ガードナーの連載コラム「数学ゲーム」を読むのを楽しみにしていたそうで、自分が数学者になったきっかけの一つがこのコラムであると記しています。のちに、彼はこのコラムの後継である「数学レクリエーション」に1987年から11年間に渡って96のコラムを書き、他に57のコラムをフランス版など同誌の各国版に寄稿しました。

これらの連載のいくつかは、“Game, Set and Math”, “Another Fine Math You’ve Got Me Into”の2冊の単行本にまとめられています。この2冊に載らなかったコラムのうちの20を集めたのが本書で、原著のタイトルは“Math Hysteria”です。

各コラムはどれも親しみやすいパズルを題材としていますが、中身はかなり本格的です。ジョークを交えた文章で上手に引き込んで、一般向けのコラムとしては、ちょっと限界を超えそうなところまで踏み込んで解説してしまいます。

そのジョークや語り口は、訳者・伊藤文英氏の手によって、軽快で魅力的に表現されています。どの章もテンポ良く進み、いつの間にか、そこまで深入りするつもりではなかったと思うようなところまで読まされてしまいます。

では、本文からいくつかのコラムを紹介しましょう。まずは、子供向けの紹介などに使えそうなパズルです。

第2章「もう一つのドミノ理論」

石屋が市場の床に石版を敷き詰める仕事を請け負えるかどうか悩んでいます。大きさ 8×8 の市場に、大きさ 1×2 の長方形の石版を並べなくてははいけません。しかしこの区画のどこか2ヶ所には像があり、その部分には敷かなくて良いというのです。31枚の石版を用意すれば大きさとしてはちょうど良くなりますが、 8×8 の床全体が市松模様に塗られていると考えてみると、各長方形は白と黒の正方形をひとつずつ埋めるため、その二つの像が同じ色の場所にあるとパリティが合わず敷き詰めることができません。

石屋の仲間が場所を調べてきて、2つの像は異なる色の場所にあることがわかりましたが、正確な位置がわかりません。試行錯誤の末、2つの像の場所の色が異なるならばいつでも敷ける方法を見つけ出します。

安心して請け負おうとすると、今度は新しい2体の像が建つとの情報が入ります。これらも異なる色のところに置かれるそうですが、今回はどこでも良いというわけには行きません。敷けるための条件を調べて、もういちど像の場所の確認に出かけることになりました。

* * *

第4章「マーフィーの法則の真実」

マーフィーの法則によれば、悪い結果が考えられるときには、かならず悪い結果になるそうです。この典型的な例として、イギリスの小説家 ジェームス・ペインによる「トーストが落ちたときは、かならずバターを塗った面が床に張り付く」という内容の詩があります。

1991年に、イギリス放送協会（BBC）のテレビ番組「QED」が実験を行いました。さまざまな条件のもとで、トーストがランダムにほうり投げられたのですが、当然ながらどのような場合にも、バターの面が下にくるかとうかは統計的に五分五分だったそうです。

しかし、普通はトーストを空中にでたらめに投げあげたりはしません。トーストはバターを塗ったパンを上にしてテーブルに置かれていて、テーブルの端から押し出されて落ちるのです。床に落ちる間は回転しますが、その角速度は落ち始めるときに重心が外にはみ出していた割合（＝臨界はみ出し率）によって決まります。普通のテーブルの高さと重力の関係から、 $(2n + 1)\pi$ 回転が起りやすくなっているのではないのでしょうか？

この章では、どのくらい回転するか計算したロバート・マシューズの結果を紹介しているのですが、なかなか本格的です。使われるパラメータは、こんなにたくさんにあります。

g : 重力加速度, m : トーストの質量, a : トーストの幅の半分

δ : 落ちはじめるときの重心のテーブルからはみ出した長さ,

θ : トーストの角度, ω : 回転の角速度,

H : テーブルの高さ, $\eta = \delta/a$: 臨界はみ出し率

このとき、トーストがテーブルの端を支点として回転する間は、

$$\omega^2 = (6g/a)(\eta/(1 + 3\eta^2)) \sin \theta$$

に従って動き、トーストにかかる重力がテーブルの端の摩擦力を超えたとき、トーストはその時点での回転速度で回転しながら落ちていきます。計算すると、一般的に考えられる状況では、少なくとも π 回転するが、 2π は回転しないことがわかります。

臨界はみ出し率は、トーストをゆっくり押し出したときは1.5パーセント程度ですが、6パーセントを超えないと 2π 回転はしないそうです。落ちそうになったときに、6パーセン

トを超えるように思い切りはたくか、高さ 3 メートル以上のテーブルで食事をすれば、 2π 回転してバターの方が上になるのですが、現実的ではありませんね。

マーフィーの法則と呼ばれる現象には、このように確率的に非対称なものが多いのかもしれない。

* * *

第 12 章 恨みっこなしの山分けの方法

二人のあいだでケーキを公平に分けるには、「わたしが切って、あなたが選ぶ」という簡単な方法があります。3 人以上の場合に、公平に分配するにはどのようにすれば良いのでしょうか。

n 人のプレーヤー P_1, P_2, \dots, P_n 全員が自分の取り分を $1/n$ 以上だと思える分け方として、ステファン・バナッハとプロニスワフ・クナステルによる、下記の方法が紹介されています。

P_1 は全体の $1/n$ だと思える大きさの切れ端 C を切り出す。この C について、 P_2, \dots, P_n の順に次々に以下のどちらかを行う。

- (a) C の大きさが $1/n$ 以下だと思えるとき、何もしない。
- (b) C が $1/n$ より大きいと思えるとき、 $1/n$ だと思える大きさに削る。

P_n まで終わったら、最後に C を削った人が C をもらう。

ケーキの残りとは削られたケーキすべてをあつめて、残り $n-1$ 人で同じ手順で分ける。

しかし、自分が平均以上もらったと思ったとしても、他の誰かがもらったケーキがもっと多いと感じたら不満に思うのかもしれない。全員が「自分のもらったケーキが最大のケーキの一つだ」と思えるようにケーキを分割する方法は、恨みっこなしの手順と呼ばれています。4 人の場合までの手順が紹介されていますが、なかなか複雑です。

* * *

さて、冒頭の戦利品の宝石の山分けの問題ですが、盗賊たちは公平な山分けの仕方を知るために大学の図書館に向かい数学書を調べて学びます。そしてブラムスとテイラーによる 4 人の方での恨みっこなしの手順を見つけ出し、その複雑な手順に従って分けていきます。しかし 2 時間もかけて分配を進めたのちに、次は一個の大きなエメラルドを 12 等分しなくてはいけないことに気づきます。そこで警察のサイレンが聞こえて時間切れとなり決闘が始まってしまうのです。

たしかにケーキの配分と、切り分けられない有限個の宝石の分配ではわけが違います。ある程度の割合で、切り分けられる金の板でも混ぜていけば分けられそうな気がします。例えば n 人のプレーヤー全員に、一番高価だと思える宝石と同等の金の量を聞いて、多いほうから二人目の答えの $n-1$ 倍以上の金があれば上手く分けられるのでしょうか。