

書 評

数値解析入門

齊藤宣一 著， 東京大学出版会， 2012 年

明治大学総合数理学部
桂田 祐史

著者の齊藤氏は、偏微分方程式の数値解析の研究で顕著な業績があり、所属する東京大学数理科学研究科で多くの研究者を育てている。

数値解析という言葉は、人により場面により違った意味で使われることがある。著者は [1] の中で「様々な数学的概念を、具体的に数値を計算するという立場から研究する分野を数値解析という」と説明している。この文章では、この意味で数値解析という言葉を用いる。

本書は、基本的な数値計算法の基礎的な数理を、主に解析学の視点に立って解説したものである。評者としては残念ながら、著者の専門の偏微分方程式の数値解析を論じたものではない。

本書と同じような趣旨のテキストは、1970 年代に森 [2], 山本 [3], 篠原 [4] など定評のあるものが出版され、これらは版を改めるなどして、現在でも入手可能である。その後は、杉原・室田 ([5], 1994) を例外として (この本は線形計算については [6] に回しているし、専門的な色彩が濃く、違う種類のテキストと考えるべきかもしれない)、長い間出版されていなかった。

この間、数値解析についての良い本が出版されなかったわけではない。取り扱うテーマをしばったり、プログラミングについても解説したり、趣の異なる本が多くなったということである。ここで個別の名前はあげないが、評者が座右の書としているテキストは多数ある。

実は著者は最近「数値解析」([1], 2016) というテキストも著した。こちらは数値例や図が豊富で、楽しい本に仕上がっている。それでも実際のプログラムは掲載せず、出版社の WWW サイトに置いておく、という形を取っている。このやり方が成功するのかどうか、現時点で評者には判断が出来ないが、従来、特定のプログラミング言語や処理系に依存したプログラムを載せた多くの本が、良書であってもマーケティング的には古くなっていき、新刊で入手できなくなってしまっていることを思いおこすと、注目すべき試みであると考えている。

そういうわけで、本書のようなテキストが出版されるのは久しぶりで、噂を聞いた頃から数値解析の分野の人達から期待されていたものである。

章と節のタイトルを見てみよう。

- 1 章 「数の表現」 (浮動小数点数, 浮動小数点数の演算)
- 2 章 「連立一次方程式と行列の分解」 (連立一次方程式とクラメールの公式, エルミート行列と実対称行列, 優対角行列と既約行列, ガウスの消去法, LU 分解とコレスキー分解, 一般の場合の LU 分解, QR 分解, シューア分解)
- 3 章 「連立一次方程式と行列のノルム」 (ベクトルのノルム, 行列のノルム, 定常反復法, 安定性と条件数)
- 4 章 「非線形方程式」 (C^k 級関数とテイラーの定理, 二分法, 反復法と不動点定理, ベクトル値関数の微分, 多変数の反復法)
- 5 章 「固有値問題」 (固有値の包み込み, 冪乗法と逆冪乗法, QR 法)
- 6 章 「関数近似」 (ノルム空間, ワイエルシュトラスの近似定理, 最良近似多項式, 最小自乗近似多項式と内積空間, 直交多項式)
- 7 章 「補間と積分」 (補間多項式, 区分的多項式補間, スプライン補間, ニュートン-コーツ積分公式, 周期関数と複合台形則, ガウス型積分公式)
- 8 章 「常微分方程式の初期値問題」 (微分方程式と基本定理, 離散変数法の例, 一段法, 2 段数のルンゲ-クッタ法の構成, 一般のルンゲ-クッタ法, 刻み幅の自動調節, 絶対安定領域と硬い問題)
- 9 章 「連立一次方程式とクリロフ部分空間」 (共役勾配法, 収束の速さと前処理)

以下, 順を追って簡単にコメントする.

1 章は浮動小数点数についての説明である. 近年, 精度保証付き数値計算の研究の進展がめざましく, もうしばらくしたら, このあたりの説明の仕方は (どのくらいの分量を割くかも含めて) かなり変わることになるかもしれない, と漠然と感じているが, ここはオーソドックスな記述に止めている.

2, 3 章はいわゆる連立 1 次方程式の数値解法を取り扱っている. 解法の種類 (直接法と定常反復法) で分けるのではなく, 「行列の分解」, 「行列のノルム」と議論に用いる数学的概念で分けてある. また, アルゴリズムの良し悪しのような議論をするためには, 行列の疎性, 計算量という観点が必要になるが, それについてはほとんど論じていない. この辺に著者の思想が垣間見える感じがした.

実は評者はつい先日, 著者の講演「数値解析の諸相」を聴く機会を持てた. 興味深い話が色々あったが, その中で学部教育 (数学科) における数値解析の教育で, 以前は連立 1 次方程式のプログラミングの説明にも時間を割いていたが, 今は (例えば MATLAB のような) ソフトウェアに任せることにして, 説明を短時間で切り上げ, 他のことに注力している, という話があった. 従来から, 固有値問題については, 「実際のプログラムは専門家が書いたものを使うべきである, プログラムを正しく理解し, 良い選択が出来るようになるために, 諸概念をきちんと学ぶべし」のようなことがよく言われてきたが, 連

立 1 次方程式についてもそうすべき時が来ているのかもしれない。そういう考え方に立てば、著者の選択は納得出来る。

3 章 1, 2 節の説明はしっかり分かりやすく書かれていて、他書を探す必要がない。これはとてもありがたい。3 節は安定性の話であるが、定番のアリゴリズムと言える Gauss の消去法の数値的安定性は、実は非常にやっかいな問題であることが知られている。講義をする者にとっては難所である。連立 1 次方程式を摂動した問題の解析を論じた後から「後退誤差解析」という語を紹介しているが、最初に「後退誤差解析とは」と切り出してから摂動の話に入った方が読みやすいのではないかと感じた。

4 章は、基本的なところから解説を始めていて分かりやすい。初学者にはありがたいであろう。代数方程式に対する Durand-Kerner 法の紹介をしていて 2 次収束するとあるが、多くの本で注意されているように、Durand-Kerner 法は、実はある種のニュートン法であると述べた方が理解しやすいと思われる。

5 章は行列の固有値問題である。多くのテキストでは、行列が対称な場合に鏡映変換や二次元平面内の回転等の直交変換で三重対角行列 (非対称な場合は Hessenberg 行列) に相似変換するとか、二分法で固有値を求める等の話がかなりのウェイトを占めている。本書はそういうものを切り捨てて短く (16 頁) まとめている。これには最初少なからず驚かされたが、著者の姿勢が首尾一貫しているということかもしれない。一方、熟読してみると非常に読み応えがあり面白く、また別の意味で驚いた。

6 章は、もともとアルゴリズムの話があまり含まれていない項目であり、評者などは講義するとしたら短時間で飛ばしてしまいそうだが、紙数を惜しまずに説明してある。自習をする学生は助かるであろう。

7 章はほぼ定番の内容と言える。評者としては、短くても DE 公式に言及するならば、それが解析関数について有効な方法であり、その誤差解析は関数論を用いた高橋・森理論で行われることを書いておいてほしかった。これは微積分のテキストで、関数論に言及しないのは、と文句を言っているようなもので、言いがかりに近いかもしれない。

8 章の常微分方程式の初期値問題については、評者はこれまで、常微分方程式のみを取り上げた本を読まざるをえない、と考えていたが、ようやくそうしないで済みそうである。

9 章の CG 法は、とても奥が深そうだと評者はつねづね感じている。ここはさわりということになるであろうが、さわりの部分としては、やはり他書に頼る必要がなく、便利である。

このカテゴリーの本では、何をとりあげて、何をとりあげないかの選択が難しい。最初にざっと眺めたときは「あれを入れたらどうか、これを入れるよりは」と感じるころがないわけではなかったが、読み始めると、この本全体を通して、説明のトーンが同じように保たれていて取り上げられた項目の説明は非常にしっかりとしているので、項目の選択に意見する気はほとんどなくなった。

実際に数値計算を行おうとすると、色々なことを学ぶ必要があるが、数学としての数値解析を学ぶためには、この本は第一にお勧めできるものである。

著者の WWW サイトに、『「数値解析入門」補講』という文書が掲載されている (http://www.infsup.jp/saito/materials/na_book_appendix1.pdf). 「内容に関する誤植の訂正, 内容の補足説明をまとめることを目的に書かれた, 著者の私的なノートです」とあるが, 本書がどういう本か知りたい人にも, 本書を読んで勉強中の人にも, ぜひ一読をお勧めする. 細かいところまで検討した上で, 分かりやすさ・読みやすさを考えてどう書くかに心を砕いたことがよく伝わって来る. 執筆の経緯について「入門的な内容を講義調で説明した本であれば, 新たな一冊として加える価値があるかもしれない」とあるのを読んで, 本書のトーンが納得できた.

著者の WWW サイトをみると, 所属する研究科で講義形式の授業と演習形式の授業を担当していることが分かる. これが本書と [1] のもとになったと推察する. より著者の専門に近い, 偏微分方程式に対する差分法, 有限要素法を解説した講義も担当されているようなので, それをもとにしたテキストも, ぜひ執筆していただきたいものである.

参考文献

- [1] 齊藤 宣一, 数値解析, 共立出版 (2017).
- [2] 森 正武, 数値解析, 共立出版 (第 1 版 1973, 第 2 版 2002).
- [3] 山本 哲朗, 数値解析入門, サイエンス社 (初版 1976, 新訂版 2003).
- [4] 篠原 能材, 数値解析の基礎, 日新出版 (初版 1978, 5 版 1997).
- [5] 杉原 正顯, 室田 一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994).
- [6] 杉原 正顯, 室田 一雄, 線形計算の数理, 岩波書店 (2009).