書　評

非線形な世界

大野克嗣 著，東京大学出版会，2009 年

九州大学数理学研究院　千葉逸人

「非線形」という名を冠した本書であるが，その目的は非線形現象に対する数学や物理の理論を解説することではなく，非線形現象に対する物理学者の構え方やものの見方について論じた本である．特に非線形性によって誘発されるカオス，スケール干渉，複雑系などに対し,「概念分析」と「現象論」をキーワードとして，基礎物理学者がどのように向き合うべきか，どのようにアプローチしていくべきかが議論されている．このように書くと何か哲学的な雰囲気がするが，実際，そのような読み方をしても構わないだろう．本書を最初にパラパラとめくってみて気づくことは，その圧倒的な脚注の多さである．数学や物理の原論文の細かな補足に留まらず，生物学や人文科学からの多くの補足解説や“ 寄り道 ”が与えられていて，脚注を拾い読みするだけでもそれなりに楽しめる．著者の言葉を借りて言えば「いわゆる二つの文化があるべきではない」．すなわち，自然科学と人文科学の間に大きな垣根があるべきではない (当然，数学と物理や生物との間にも)．このことは少し立ち止まって考えれば誰にでも分かることであるが，多くの人は自分の研究に没頭するあまり忘れがちになる．本書はそのことを思い出させてくれる格好の材料にもなる．そういうわけで，単に学生のみならず，物理学者のものの見方，考え方を知りたい数学者や，自分の研究に没頭するあまり基礎物理学者としての正しいあり方を見失いがちなプロの物理学者にも薦めることができる１冊である．以下，各章の内容を詳しく見ていこう．

第１章で本書の内容を簡単に俯瞰したあと，第２章では「概念分析」の立場からカオスとランダムさについての解説がなされている．本書において「概念分析」とは，(思考) 実験や観察等で得られた直観的な経験事実を，それと整合するように理論的，ないし数学的に定式化することである．したがって数学書のように天下り的にカオスの定義を与えるようなことはせずに，まずは簡単なモデル (大地震に関するモデルで，他書では見かけない) を詳細に観察し，直観的なレベルでは非常に複雑な振舞いが起こるであろうことを見る．次に，得られた振舞いをどのように数学的に定式化すればよいかを考えていくのである．ランダムさ，情報理論，記号力学系などの話題を交えながら，最終的にコルモゴロフ–シナイエントロピーの定義 (つまり測度論的なカオスの定義) にたどり着く．最後に，得られた定義が我々の直観ときちんと整合しているかどうかを確認する．最後の手続きは物理学者としては当然の態度であるが，より良い概念を手にするためにはもちろん数学者にとっても必要な作業である．カオスに関するきちんとした数学書を読むのは少し敷居が高いと感じる物理の学生や，エルゴー

ド理論の本を読んでカオスについてある程度知ってはいるものの，直観的理解に欠けると思っている人にとっては格好の読み物だと思う．カオスの定義を作り上げるのと並行して「ランダムさ」の特徴づけも与えようとする点も非常に面白い．

第 3 章は「くりこみ理論」の考え方についてである．非線形現象の特徴として，無限小のスケールで起こったカオス的振舞いがスケール干渉し，我々の観測にかかるような大きなスケールに影響を及ぼしてしまう (線形系ではスケール干渉は起こらない．線形偏微分方程式が，級数展開により互いに独立な方程式に分解されることを思い出そう)．では小さなスケールの世界がカオス的だったら，我々のスケールの世界もカオス的なのであろうか．否，そうではないからこそ我々はいくつもの美しい自然の法則を知っているし，犬や猫でさえ体で物理法則を知っている．すなわち，小さなスケールでの複雑さはある仕方でしか大きなスケールに影響を及ぼさず，小さなスケールでの出来事に影響されない不変な部分が大きなスケールの世界にはあるはずだ．その不変な部分を取り出すための手法を総称して「くりこみ」と呼ぶのである．本章ではまず「現象論」をキーワードとして，ミクロの世界では複雑だが我々の世界では普遍的な構造が立ち現れるような例がいくつか挙げられる (物理学者にとってはよく知られた例ばかりだが，数学者にはかなり勉強になるだろう)．それからその普遍的な構造を抽出するための「くりこみ」のアイデアについてより詳しい説明が与えられた後，コッホ曲線のフラクタル次元を求める問題を例にとって,「くりこみ」の実際の計算が 2 つの流儀 (Wilson–Kadanoff 流と Stückelberg–Petermann 流) で行われる．残念ながら，くりこみの計算を実際に実行するのは，一般には大変困難であり，本書ではそれ以上の具体例は示されていないが，参考文献はいくつか挙げられているのでそこからさらに勉強することは可能であろう．また最近の発展として，くりこみのアイデアを用いた微分方程式の解の漸近解析についても詳しく述べられている．

第 4 章のテーマは「モデル化」である．言うまでもなく，数理モデルとは現象を理解するために用いられる数学的な対象のことである．現象 A のある一側面が数学的な対象 B を解析することによって得られるとき，B は A のモデルであるという．ある 1 つの現象に対しても，どのような側面を理解したいかという目的に応じて，そのモデルの立て方は様々であろう．工学においてはしばしば，対象としている系が計算機上でうまくシミュレートできればそれが良いモデルとされる．系を思い通りに制御したければそれで十分であり，背後に潜む数学的，ないし現象論的な構造は問題とされない．近年，計算機の発達により，基礎科学においてもこのような立場が目立ってきた．例えばたんぱく質が折り畳まれていく様子をシミュレートするために，数万次元の運動方程式を力任せに計算機で解くといった研究をよく見かけるようになった．しかしそのようにして得られる結果は，現象の背後に潜む普遍的な構造に関して我々に何も深い洞察を与えないだろう．対象としているたんぱく質中の原子 1 つを他のものに置き換えるだけで新たに計算をやり直さなければならず，そのようなことを繰り返して

いるうちに，我々はデータの波に押し流されてしまう．もしたんぱく質が折り畳まれるという現象が普遍的ならば，どんなたんぱく質に対しても適用できる現象論的に良いモデルが存在すると期待したい．ナヴィエ–ストークス方程式を思い出そう．流体を構成する原子の種類やその分子間力など，ミクロの世界は極めて多様であり得る．ところがほんのいくつかのパラメータ (密度と粘性定数) をいじるだけで，様々な流体に対する巨視的な流れを記述できる．この章では，このように必要のないミクロの世界の情報は捨て去った「現象論」的なモデルに的を絞り，良いモデルとはどうあるべきかを述べている．いったん良いモデルが得られれば,「くりこみ」によって実際に現象論的事実を抽出できる可能性があることにも注意しておこう．

最後の章は,「複雑系」の研究は今後どうあるべきかについて著者の見解が述べられている.「複雑系」と銘打ったいくつかの本を眺めてみたり，Wikipedia(日本語版よりは少しましな英語版) で複雑系を調べてみると，カオスやフラクタルがその代表格として挙げられている．要するに，日常用語のレベルで複雑なものを複雑系と呼んでいる感がある．しかし著者はこういった立場に警告を与える．例えばロジスティク写像 $f(x) = ax(1-x)$ によって生成されるカオスについての“ あらゆる ”情報を相手に送りたいとしよう．それには，f の定義式のみを送れば十分である．つまり，情報が十分に圧縮可能なのだ．著者に言わせればこのようなものは複雑系と呼ぶべきではない．同様の理由で自己相似性や自己組織化機能を持つ現象も複雑系ではない．情報が圧縮できないことを複雑系の 1 つの特徴とすれば，複雑系は複雑系からしか生まれない．では複雑系の代表格は何か? それは生命現象に関わることだ．より明確にするためにある一つの例が与えられる．今，2 つの試験管を用意し，一方には食塩の材料 (構成元素や必要なエネルギー等) を，もう一方には大腸菌の材料を入れよう．どちらの系もシュレディンガー方程式によって記述され，したがって基礎方程式の研究こそが我々をより深い理解へと導くという立場が物理学がたどってきた道である．ところが，食塩水の系ではたちまち食塩の結晶が生成されるのに対し，大腸菌の系では，よほど運が良くない限り生きた大腸菌は生まれないだろう．生命を作り出すためには，基礎法則に加えて「初期条件」が極めて重要な役割を果たすことが分かる．しかし我々は必要な「初期条件」など意識することなく子供を産むことができるではないか．必要な情報は遺伝子に刻まれているのだ．つまり生命はこみいった情報を保持するための機能を持っており，しかもそれはノイズに対して安定であろう．このような考察を重ねていくことで「複雑系」を特徴づけていき，かつ研究の正しい方向性を提案していくのが本章の目的である．もちろん「複雑系」の定義の決定版を与えるものではないし，何か新しい結果を与えているわけでもない．ただ,「真に複雑なものには目をつぶり，自分ができる部分のみを取り出して複雑系と呼んできた」従来の研究者は，大いに反省を迫られるだろう．こういう意味において，プロの物理学者にも薦めたい本である．