

# シャボン膜, シャボン玉, 結晶の数学と応用

九州大学名誉教授

小磯 深幸

本稿は, 日本数学会 2025 年度秋季総合分科会の市民講演会 (名古屋大学, 9 月 20 日) において, 筆者が表題のタイトルで行った講演の記録である.

シャボン膜の数理モデルは極小曲面と呼ばれ, 面積極小, あるいは, 曲面の曲がり具合を表す量の一つである平均曲率が至る所零であるという特徴がある. そのため, 極小曲面は, 種々の界面現象・相対論におけるブラックホールの記述や軽量で安定なものづくり等に利用されている. 本講演では, このような極小曲面の数理と応用をご紹介し, より一般的な数学概念であるシャボン玉の数理モデル (平均曲率一定曲面. CMC 曲面と略記) に触れた. さらに, CMC 曲面よりも一般の数学概念を与える結晶の数理モデルについて, その基本的な考え方や CMC 曲面とは異なる性質, 建築物のデザインへの応用を紹介した.

以下は, 市民講演会で使用したスライドに, 当日聴衆の皆様からいただいた御質問を踏まえて少し加筆し, また, 一部の図の差し替えや現在研究中の事柄の削除などを行ったものである.

# 日本数学会 市民講演会

## シャボン膜, シャボン玉, 結晶の 数学と応用

小磯 深幸

(九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)

2025年9月20日(土)

名古屋大学

1

## 目次

1. キーワード
2. はじめに --- 今日取り扱う図形たち ---
3. シャボン膜の形の特徴(曲がり具合)
4. 平面曲線の曲率について
5. 曲面の平均曲率
6. 面積極小曲面をどのようにして求めるか?
7. 極小曲面の (Riemann-)Weierstrass-Enneper 表現公式
8. シャボン膜と極小曲面の例
9. 極小曲面の応用(1): 建築への応用
10. 極小曲面の応用(2): ナノ・マイクロ世界の解明
11. 結晶の数理モデルと応用
12. まとめとこれから

2

# 1. キーワード

[1] 効率の良い形を求める:

変分問題: 高等学校で学ぶ「極大値・極小値を求める問題」の無限次元版.

[2] 曲線, 曲面の曲がり具合で表現する:

直線曲率は0, 平面の曲率は0. 曲がった曲線や曲面の曲がり具合で, [1] の解を特徴付ける.

3

## 2. はじめに --- 今日取り扱う図形たち ---

たとえば, シャボン膜は膜に働く力(表面張力)ができるだけ小さい形になる. 表面張力は面積に比例するため, 面積ができるだけ小さい形になる. このような性質を持つ曲面は, 極小曲面と呼ばれる.

一方, シャボン玉は, 中に一定の量の空気を包んだ状態でできるだけ表面積が小さい形になる. そのため, シャボン玉は球形になる.

固体の結晶も, エネルギーができるだけ小さい形になるが, 固体のエネルギー密度は「表面の向き」に依存する. そのため, 球形とは限らず, 例えば, 塩の結晶は立方体である.



枠に張らせたシャボン膜たち

シャボン玉  
(球形)

塩の結晶(立方体)

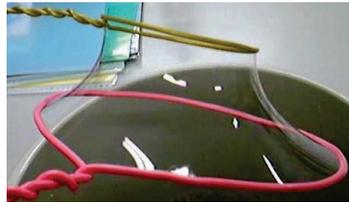
酸化セリウム(s. Asahina, Takami et al. 2011)(正八面体)

これらに共通していること: 「効率の良い形」(高校数学では1変数関数の極値問題を学ぶ. その無限次元版を使う.)

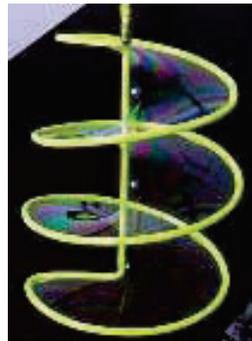
4

### 3. シャボン膜の形の特徴(曲がり具合)

まず、いくつかのシャボン膜の写真を御覧ください。



シャボン膜たち



シャボン玉

シャボン玉は「外向きに凸」な形をしています。どのシャボン膜も「どちら向きに曲がっている」と簡単には言えない形をしています。

シャボン膜やシャボン玉の形は、曲面の曲がり具合を表す量である「平均曲率」によって表現することができます！

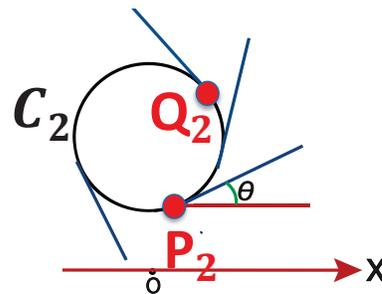
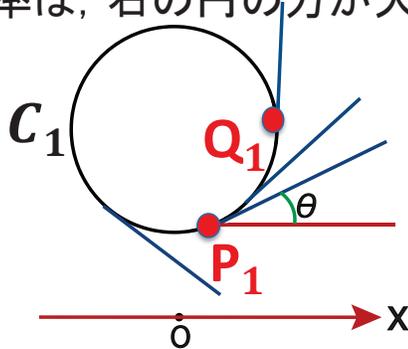
平均曲率についてご説明しましょう。

5

### 4. 平面曲線の曲率について

#### 【平面曲線の曲率】

下の2つの円について、左の円の方が、右の円よりも曲がり方がゆるやか。言い換えると、接線の傾きの、円弧の長さに対する変化率は、右の円の方が大きい。



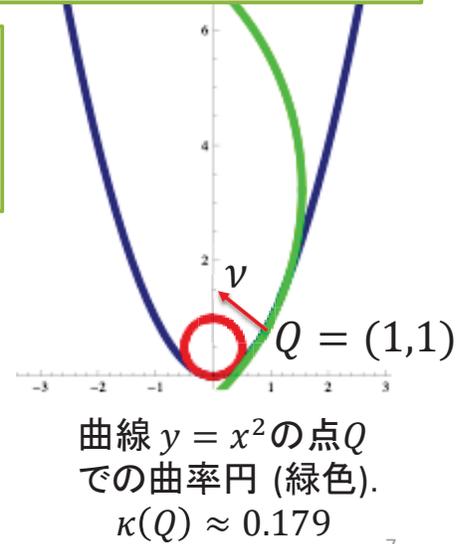
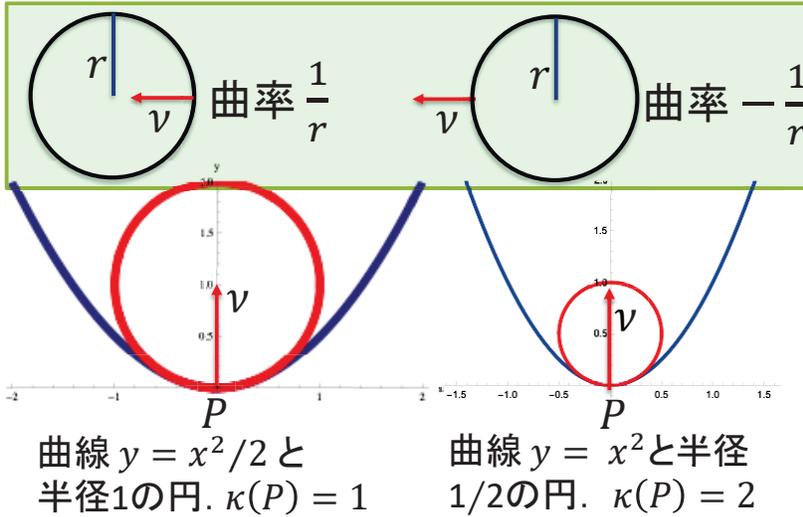
【曲率の定義】 曲線  $C$  上の点  $P$  において、 $C$  の接線が  $x$  軸と成す角の、曲線の長さに対する瞬間変化率を、 $C$  の点  $P$  における曲率という。

6

## 【平面曲線の曲率 (別の言い方)】

曲線  $C$  の点  $P$  で  $C$  と 2 次の接触をする円(曲率円という)の半径  $r(P)$  の逆数  $\frac{1}{r(P)}$  に  $\pm$  を付けたものを  $C$  の  $P$  での曲率と呼び、 $\kappa(P)$  で表す。

例. 直線の曲率は0, 半径  $r$  の円の曲率は, 単位法ベクトル  $\nu$  を円の内側向きにとる場合(下図左)は  $1/r$ ,  $\nu$  を円の外側向きにとる場合(下図右)は  $-1/r$  である。



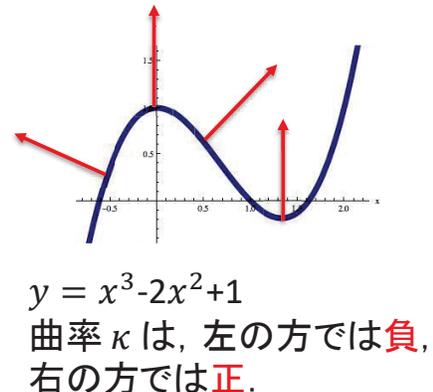
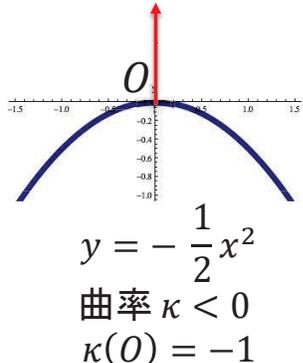
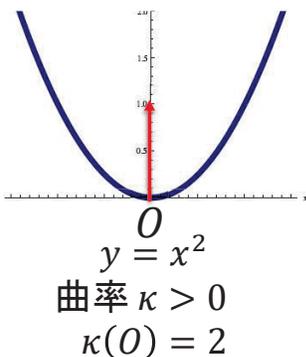
## 【平面曲線の曲率を表す式】

曲線  $y = f(x)$  の点  $P(x, f(x))$  における曲率  $\kappa(P)$  は,

$$\kappa(P) = \frac{f''(x)}{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}}$$

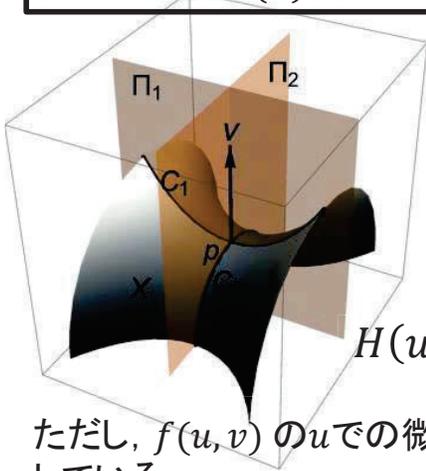
$f$  の瞬間変化率である微分  $f'$  が接線の向きを表し, その微分である  $f''$  が接線の向きの変化率を与える。

よって,  $f''(P) > 0$  ならば  $\kappa(P) > 0$ ,  $f''(P) < 0$  ならば  $\kappa(P) < 0$ . さらに,  $|\kappa(P)|$  によって, 曲線の曲がり具合が (「上に凸」「下に凸」だけでなく) **定量的に** 表される。



## 5. 曲面の平均曲率

曲面  $X$  上の点  $P$  (下図) において,  $P$  における  $X$  の法線を含む互いに直交する二つの平面  $\Pi_1, \Pi_2$  で  $X$  を切った時の切り口となる曲線(下図の  $C_1$  と  $C_2$ ) の,  $P$  での曲率の平均  $H(P)$  を,  $X$  の点  $P$  での **平均曲率** という.



$C^\infty$  級関数  $f : D(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  のグラフ

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

の平均曲率  $H$  は,

$$H(u, v) = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(f_u^2 + f_v^2 + 1)^{3/2}}$$

ただし,  $f(u, v)$  の  $u$  での微分(偏微分と呼ぶ)を  $f_u$ ,  $u$  での2階微分を  $f_{uu}$  などと表している.

$H$  が曲面  $X$  上定数の時,  $X$  を **平均曲率一定曲面**,  $H = 0$  の時, **極小曲面** と呼ぶ. この定義により, 極小曲面は, 至る所, 馬の鞍のような形をしている. なお, 「 $H(u, v) = \text{定数}$ 」という式は, 準線型楕円型と呼ばれる型の偏微分方程式で, その解は様々な良い性質を持っている.

## 6. 面積極小曲面をどのようにして求めるか?

シャボン膜は, 同じ枠を張る曲面全体の成す **無限次元空間( $S$  と書きましょう)** の中で **面積が極小** の曲面であった.

$S$  の各点に対して面積という実数が決まるので, 面積は  $S$  上で定義された関数(汎関数と呼ぶ)である.

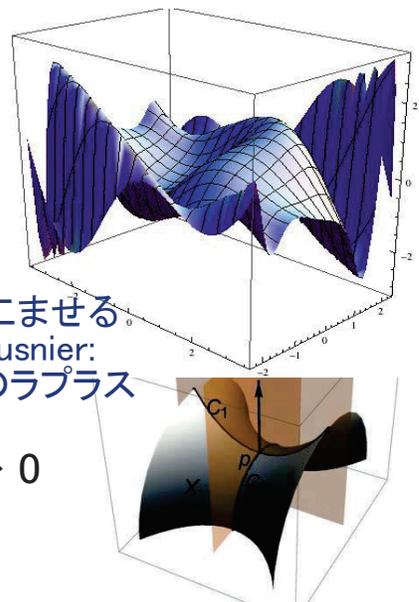
**解決法(変分法と呼ばれる): 高校数学の極値問題の無限次元版!**

- ・ 極大, 極小はどこか?
- ・ 極大(グラフの山頂), 極小(グラフの谷底)
- 面積汎関数の微分(第1変分と呼ぶ) = 0  
(J. L. Lagrange, 1760-1761)

→ 平均曲率 = 0

(平均曲率が0でなければ, 曲率が大きい方向をへこませることにより, 面積を小さくできるから.) (1776頃-, Mousnier: 極小曲面, German: 弾性体, Young-Laplace: 界面のラプラス圧)

- ・ 微分(第1変分) = 0 かつ 2階微分(第2変分) > 0
- 面積極小 (1970年代以降)



## 7. 極小曲面の(Riemann-)Weierstrass-Enneper表現公式

極小曲面は, 2つの正則関数(変数も値も複素数である微分可能な関数)  $F(z), G(z)$  を用いて  $X(z) = \operatorname{Re} \int \xi dz$  と表示される. ここで,  $\operatorname{Re}$  は実部を表し, 積分は複素変数  $z$  についての積分,  $\xi$  は次の式で定義される複素3次元のベクトル値関数である. したがって,  $X(z)$  は実3次元のベクトル値関数.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \frac{F}{2} \begin{bmatrix} 1 - G^2 \\ \sqrt{-1}(1 + G^2) \\ 2G \end{bmatrix}$$

この式を用いることにより, 極小曲面の性質を調べたり, 例をたくさん作ったりすることができる!

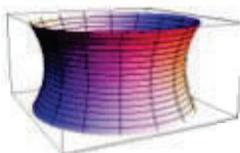
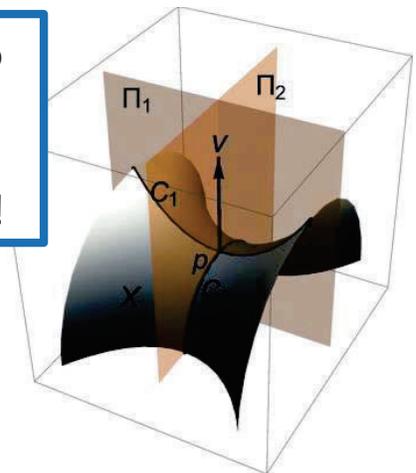
なお, この  $G$  は, 球面  $S^2$  の北極  $N = (0,0,1)$  から赤道を含む平面への立体射影  $\varphi$  と  $\nu$  の合成写像  $G = \varphi \circ \nu$  である(上右図). 即ち,  $G$  は極小曲面  $X$  の単位法ベクトルを表すと言っても良い.

11

## 8. シャボン膜と極小曲面の例

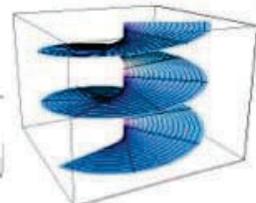
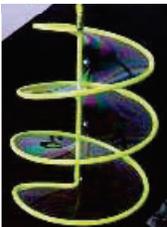
シャボン膜の数理モデルは, 平均曲率が至る所0の曲面でした. また, シャボン膜の形は数学の式で書くことができました(前ページ)! したがって, コンピュータで描くこともできます!

下図: 左の2つはシャボン膜の写真. 右の2つは数学で作られた極小曲面の式, 名称, コンピュータ画像.



懸垂面

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2} (e^{z/a} + e^{-z/a}), \quad (a > 0)$$



常らせん面

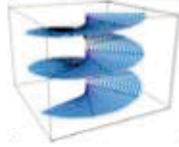
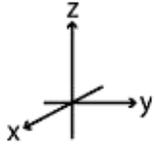
$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = kv$$

12

# 極小曲面の例

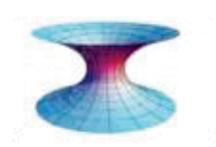
[1] 常らせん面 (helicoid)

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = kv,$$



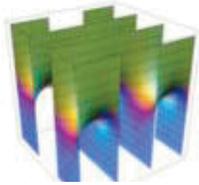
[2] 懸垂曲面 (catenoid)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a}), \quad (a > 0)$$



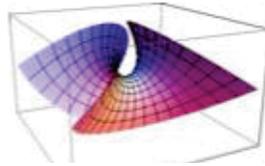
[3] シャーク曲面

$$z = \log_e \left( \frac{\cos y}{\cos x} \right),$$

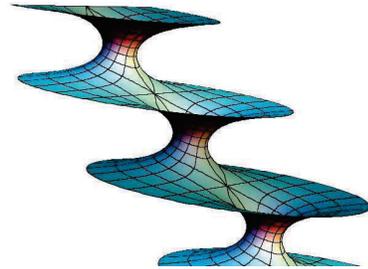


[4] エネパー曲面

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, \quad z = u^2 - v^2$$



[5] リーマンの極小曲面



13

## 極小曲面の例

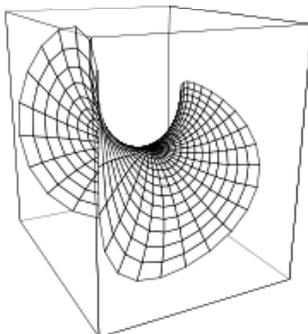
【ぎりぎり「面積極小でない」極小曲面 (M. Koiso, 1984)】

$$x = u \cos v + \frac{1}{4}u^2 \cos(2v) - \frac{1}{3}u^3 \cos(3v) - \frac{1}{8}u^4 \cos(4v)$$

$$y = -u \sin v - \frac{1}{4}u^2 \sin(2v) - \frac{1}{3}u^3 \sin(3v) - \frac{1}{8}u^4 \sin(4v)$$

$$z = u^2 \cos(2v) + \frac{1}{3}u^3 \cos(3v)$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$



同じ境界を持つ曲面の中で曲面を変形させた時、

(1)常に、面積の第1変分=0かつ

面積の第2変分  $\geq 0$  であり、

(2)面積の第2変分=0かつ面積の第3変分  $\neq 0$

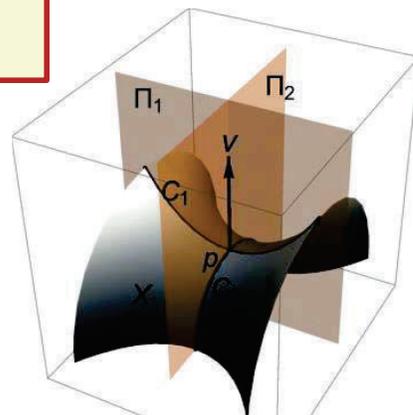
となる変形が可能.

したがって、この曲面は、同じ境界を持つ曲面の中で面積極小ではない. しかしながら、(1)より、この曲面を少しでも削れば面積極小となることが証明される.

14

## 9. 極小曲面の応用(1): 建築への応用

極小曲面のかってな点Pを通る互いに直交する二つの平面で切ったときの切り口の曲がり具合の平均(平均曲率)がいつも0  $\longrightarrow$  面白い形をしている!



面積ができるだけ小さい形。  
 $\longrightarrow$  軽量であり, 力のかかり具合のバランスが良い。

これらの性質により, シャボン膜の形が建築に利用されることがある。

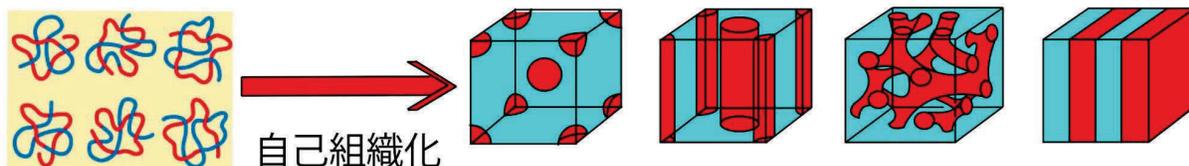
右の写真は, ミュンヘン(ドイツ)にあるオリンピックスタジアム。シャボン膜の形を使って屋根がデザインされた(フライ・オットー)。



15

## 10. 極小曲面の応用(2): ナノ・マイクロ世界の解明

「面積極小」という性質により, 極小曲面の形がナノスケール物質の形状解明に利用されることがある。(1ナノメートル =  $10^{-9}$ メートル)

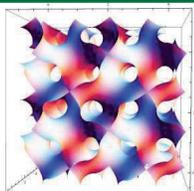


赤: 高分子 A

青: 高分子 B

高分子A, Bの長さの違いによって構造が変化。  
 左から, 球状構造, 六方柱状, 共連続構造, ラメラ。

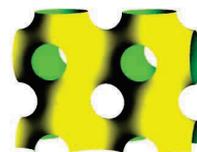
共連続構造の数理モデルとして三重周期極小曲面(たとえば, 下図の3つの曲面)が利用される。



ジャイロイド

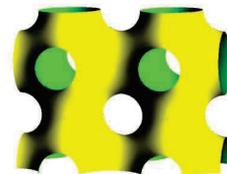
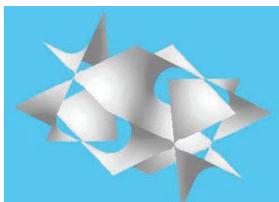
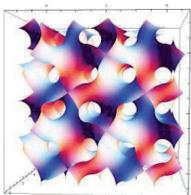


シュワルツD曲面



シュワルツP曲面

## 【ABブロック共重合体の共連続構造を与える三重周期極小曲面】



ジャイロイド(G曲面) シュワルツD曲面(D曲面) シュワルツP曲面(P曲面)

共連続構造は三重周期極小曲面の構造をもつと考えられ、実験観察上、G曲面、D曲面、P曲面が現れると考えられている。

### G曲面, D曲面, P曲面の表示式

$M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z^8 + 14z^4 + 1\}$  種数3の超楕円型リーマン面  
 $M$  から3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への写像  $X$  を次で定義する。

$$X(z) = \operatorname{Re} \left[ e^{i\theta} \int_{z_0}^z (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z) \frac{dz}{w} \right], \quad i = \sqrt{-1}$$

$\theta = 0$  の時がP曲面,  $\theta = \pi/2$  の時がD曲面,  $\theta \approx 51.9852^\circ$  の時がG曲面。

17

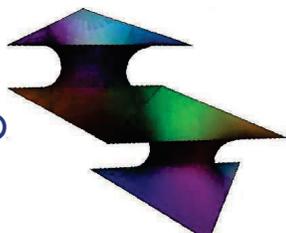
### 共連続構造と三重周期極小曲面 (歴史的なことと最近の研究成果の1つ)

共連続構造は、1970年頃までは、実験観察上、P曲面だと思われていた。1970年、A. Schoen がジャイロイド(G曲面)を**数学的に発見した**。これが**ヒントになり**、P曲面だと思われていたものがG曲面だったということがわかった! 現在ではG, P, D曲面が、温度他の条件に応じて現れると考えられている。

論文: M.Koiso-P.Piccione-T.Shoda, On bifurcation and local rigidity of triply periodic minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  (3次元ユークリッド空間内の三重周期極小曲面の剛性と分岐, 2018年) の成果:

- 新しい三重周期極小曲面を発見しました(下右図)!
- 三重周期極小曲面全体の成す空間が、ほとんどの場所では9次元空間(9=平行六面体の変形の次元)であることを証明しました!

既知の三重周期極小曲面の1つの一周期



右図:新しい極小曲面の一周期. 左図の曲面を少し変形した形.



18

# 11.結晶の数理モデルと応用

## 結晶の写真2点



塩の結晶. 立方体.



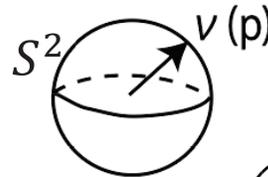
酸化セリウム結晶. 正八面体. 直径は約  $100\text{nm}=10^{-7}\text{m}$ . (S. Asahina, S. Takami et al. 2011).

これらは、非等方的エネルギーの最小解と見なすことができる。(次ページで説明)

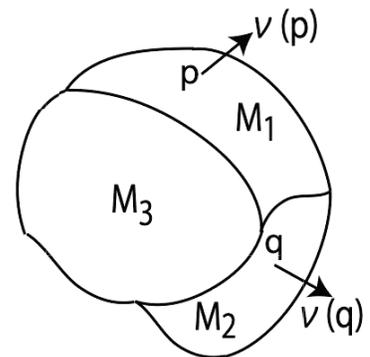
19

## 曲面の非等方的エネルギー

$\gamma$  は、単位球面  $S^2$  上で定義された  
正值連続関数とする.



$M$  は、滑らかな曲面  $M_1, \dots, M_N$   
を連続的につないだもの (右図. 区分的に滑らかな曲面と呼ぶ) とする. 各  $M_i$  の点  $p$  での  
単位法ベクトルを  $v(p)$  と表す.  $M$  の非等方的  
エネルギーを次のように定義する.



$$\mathcal{F}_\gamma(M) := \sum_{i=1}^N \int_{M_i} \gamma(v(p)) dA, \quad (dA \text{ は } M \text{ の面積要素})$$

注.  $\mathcal{F}_\gamma$  は小さい単結晶のエネルギーの数理モデル.  
 $\gamma$  は、単位表面積当たりで単位体積を増加させるために必要なエネルギー.

20

## Wulff shape (ウルフ図形): 非等方的エネルギーの最小解

定理 1 (J. E. Taylor, 1978).  $V > 0$  とする. 体積  $V$  を囲む閉曲面の中で非等方的エネルギー  $\mathcal{F}_\gamma = \int \gamma(\nu) dA$  の最小値をとるものが (平行移動を除き) ただ1つ存在する. (これをウルフ図形と呼ぶ.)

例 (i)  $\gamma = 1$  のとき,  $\mathcal{F}_\gamma(M) = \int_M dA$  は  $M$  の面積. したがって, ウルフ図形  $W_\gamma$  は球面.



シャボン玉  
(球面)

例 (ii)  $\gamma(\nu) = \gamma(\nu_1, \nu_2, \nu_3) := |\nu_1| + |\nu_2| + |\nu_3|$  のとき, ウルフ図形  $W_\gamma$  は立方体であり, その各面は座標平面に平行である. ここで,  $\gamma$  の値が小さい向きが, 面の向きである.



21

## 非等方的エネルギーの極小解の方程式

$\gamma$  は, 単位球面  $S^2$  上で定義された正值関数で,  $C^2$  級 (2階までの微分が連続関数) とする. 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の点  $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$  に対し,  $\gamma(X) = \|X\| \gamma\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$  とおくことにより,  $\gamma$  を  $\mathbb{R}^3$  に拡張する.

$(u_1, u_2)$  平面内の領域  $\Omega$  上の  $C^2$  級関数  $f(u_1, u_2)$  のグラフ

$$X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)), \quad (u_1, u_2) \in \Omega$$

の非等方的平均曲率は,  $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)$  とおくと,

$$\Lambda(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 \gamma(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Bigg|_{X=(-Df, 1)} \frac{\partial^2 f(u_i, u_j)}{\partial u_i \partial u_j}$$

「体積一定」の条件のもとでの非等方的エネルギーの極小解 (小さい結晶の数理モデル) は, 方程式「 $\Lambda = \text{定数}$ 」を満たす.

22

## 非等方的エネルギーの平衡閉曲面の一意性

問. 良い性質を持つ非等方的平均曲率一定閉曲面はウルフ図形に限るか?

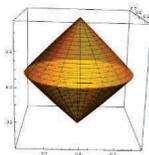
例えば, 平均曲率一定閉曲面(シャボン玉の数理モデル)については, 自己交差しないものは**球面に限る**(Alexandrov, 1962). したがって, シャボン玉は球形になる!

非等方的平均曲率一定閉曲面(結晶の数理モデル)についてはどうか?

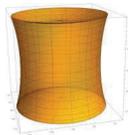
23

自己交差しない非等方的平均曲率一定(CAMC)閉曲面の一意性が成り立たない例 (Jikumaru-Koiso, 2018)

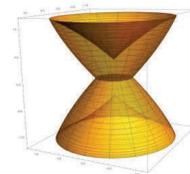
$$(i) \gamma(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^3 + \nu_3^6}{(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^{5/2}}$$



ウルフ図形  $W_\gamma$

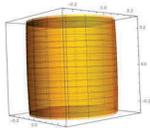


CAMC閉曲面

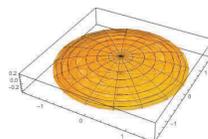


CAMC閉曲面

$$(ii) \gamma = \frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^3 + 15(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\nu_3^2 + 15(\nu_1^2 + \nu_2^2)\nu_3^4 + \nu_3^6}{4(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^{5/2}}$$



ウルフ図形  $W_\gamma$



円盤型CAMC閉曲面



紡錘形CAMC閉曲面

非等方的平均曲率一定曲面の建築への応用  
--- 理想の採光を実現する建物の設計をお手伝いします! ---

現在、次の論文を執筆中です。

Hayakawa - Hayashi – Jikumaru – Koiso – Kumagai, Anisotropic mean curvature flow for generating discrete surfaces with orientation-based area distribution (方向ベースの面積分布を持つ離散曲面を生成するための非等方的平均曲率流)

この論文では、11個のパラメータにより好みの向きを与え、境界曲線と「体積」に関する情報を与えると、非等方的エネルギーが最小の形、即ち望ましい向きを持つ建物の形が近似的に生成されるプログラムを提案しています。

25

## 12.まとめとこれから

- (1) 曲線の曲率や曲面の平均曲率を定義し、シャボン膜が「平均曲率が至る所0の曲面(極小曲面)」となることを紹介しました。
- (2) 極小曲面のWeierstrass表現公式を紹介し、極小曲面の例を紹介しました。
- (3) 極小曲面の応用例(1.建築 2.マイクロ世界の解明)を紹介しました。
- (4) 三重周期極小曲面についての最近の研究成果を述べました。
- (5) 結晶の数理モデル、シャボン玉の数理モデルとは異なる性質、建築物のデザインへの応用を紹介しました。

本日の課題であった「曲面についてのエネルギー極小解を調べる理論(変分法)」は、シャボン膜の形にもブラックホールの形にも、水滴、赤血球、... といろいろなものに応用できます。

しかし、塩の結晶や金属の結晶のようにかど(特異点)がある物体については、かどのところで微分ができないため同様の議論ができず、新たな研究が発展中です。

これで私のお話は終了です。御清聴いただき有難うございました。

26