書　評

授業では教えてくれない微積分学

福島竜輝 著，森北出版，2024 年

一橋大学大学院経済研究科
川平　友規

1　「10 を知って 1 を教える」ということ

私（評者）の大学院生時分，

授業というものは，「10 を知って 1 を教える」ぐらいがちょうどいい

という人がいた．私はとある学習塾で講師のアルバイトをしていて，その人はとても人気のある，化学のベテラン講師だった．たしか 3 月の終わりごろ，全講師が集まる総会のような場で，来たる新年度に向けた訓示のような体で，さらりと，さも当然のように，上のひと言を述べたのである．

学習塾で教えられるような，大学受験レベルの数学を「1」として，はたして自分は「10」の知識をもっているだろうか．塾では偉そうにして教えているけども，それは「10」の中から厳選された「1」であったか．じつのところ，何をもって「10」とするのか，今もよくわからないのだが，当時 20 代前半だった私は，自分がもちあわせているのはせいぜい「2」とか「3」とか，そんなものなんじゃないか，という気がしてならず，少し申し訳ない気分になった．

それから，私がプロの塾講師を目指すことはなかったけども，「プロとして教えること」の理想のひとつを，この言葉に学んだ気がする．つまり，お金をもらって教壇に立つ以上は，日々是精進，「10」に至る知識を獲得し，それを己の熱意で煮詰め，蒸溜せよ．かくして得られる「1」のみを，おごることなく教え伝えるべし．

ところが現実は，それほど簡単ではないのである．

2　教えたい，でも，教えられない微積分学

本書『授業では教えてくれない微積分学』のテーマである「微積分学」[1]は，大学でもっとも開講数の多い数学科目の 1 つであろう．数学に近しい分野の教員をしていると，数年

[1] 大学の教科名としては，「微分積分学」，「微分積分」などが多い気がする．とくに決まりはないので，ここでは書名に合わせて「微積分学」としよう．

に１度，いや，どうかしたら毎年でも担当することになるから，誰もが一家言もつようになるものである．それゆえに，「10」に至らんとする知識をもつ私たち教員は，「1」として何を教えるべきか，という問題にいつも頭を悩ませている．もちろん，与えられた授業時間や教える相手に応じて調整することになるのだが，その過程で切り捨てられる微積分本来の「香り」や「旨み」，数学という理論体系が 2000 年以上かけて熟成させた重厚な味わいを，学生の皆さんに伝えきれない，そのもどかしさ．「厳密なる解析学の入門部分」として微積分を学ぶことを１つの目標とするならば，私たち教員はそれぞれ，その山頂に至る好みのルートをもちながら，それは自身の頭の中にだけ存在して，誰かと共有する機会はなかなか訪れない．

本書，『授業では教えてくれない微積分学』は，著者の福島竜輝氏が提案する独自のルートを，その魅力とともに解説する本だといえるだろう．普段は教えられない「9」の部分も含めて再構成された，『教えたい，でも，教えられない微積分学』というわけである．

3　本書の「標準的でない」部分

本書では，１変数関数の微積分学が，いわゆる ε-δ 式の解析学によって再構築されていく．ただし，著者による「まえがき」の言葉を借りれば，それを「標準的ではない方法で解説するもの」だという[2]．

以下では，その「標準的でない」部分をざっとさらってみよう．たとえば，高木貞治の『解析概論』の理論構成をひとつ念頭において，そこから本書を眺めたときの「差分」として，特徴的な部分をとりあげてみる．

（ア）　実数の構成．　ようするに，無理数とはいったい何なのか，という問いへの解答の与え方である．

古典的には，有理数までは既知とみなした上で，「有理数の全体がなす全順序集合の切断」による構成（高木『解析概論』の「附録 I」）や，「有理数からなるコーシー列の同値類」による構成がポピュラーである．それらが適切に定義され，有理数と合わせた全体がいわゆる実数の公理（順序体の公理と連続性の公理）を満たしていれば，「実数」とよばれる権利をもつのであった．すなわち，無理数とは何か，といった問いに対し，これが無理数です，と提示できる数学的対象を具体的に用意してしまうのである．

本書では，科学の世界でもっとも通用し，高校生にも馴染みがあるであろう，「数の十進小数展開」のアイディアを用いて実数全体を定式化する．すなわち，実数とは「十進無限小

[2]本書の，とくに微積分教育という観点からの立ち位置については，「あとがき」にもかなり詳しく書かれている．「あとがき」にはいろいろと参考文献も挙げられており，読み物としても面白い．

数によって表現される，計算可能な数学的対象」として導入されるのである[3]．高校を出たばかりの大学生への負荷が少ないのは利点だが，「切断」や「コーシー列」による構成と同様，四則演算をきっちりと定義し，分配法則といった計算規則まで確認するのは意外と面倒な作業である．実質的には「コーシー列」による構成と同様に，有理数による近似列を用いればよく，本書の場合は付録 A で，具体例を通した明快な説明によって補われている．

（イ）微分（5 章）より先に積分（4 章）が導入されている点． 古代ギリシアの「取り尽くし法」を積分概念の嚆矢とみなすならば，微分の方はずいぶんと遅れてフェルマーの時代に誕生したわけで，本来なら積分のほうが，素朴でわかりやすい対象なのかもしれない[4]．

積分を先に立てるご利益としてひとつ思いつくのは，三角関数の定義が幾何学的に自然にできることであろう．高校数学風に，単位円周上の点の座標として「三角関数」を定義したければ，まず円周上の点をパラメトライズする「角度」（ラジアン）の定義が必要である．「角度」の定義には「円の弧長」の定義が必要，さらに「円の弧長」の定義には「曲線の長さ」の定義が必要だが，円のように滑らかな曲線であれば，その長さは定積分によって与えられる．この段階で，円弧を表す関数の微分可能性を使うことになるが，それには目をつむって，形式的かつ合理的に，「円の弧長」を表す積分によって直接「逆三角関数」を定義し（たとえば $\arcsin x := \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$），その逆関数として三角関数の定義を与えるのである．途中でちゃんと微分可能性の議論を経由したとしても，おおむね高校数学の範疇で話が収まるのは悪くない．

もちろん，これは「三角関数の厳密な定義」という目標地点に至るルートの 1 つに過ぎず，級数を用いるなり微分方程式を用いるなりして，積分を経由しない「合理的」なルートもあるだろう．しかし，実際の教育現場で，そのような教授法をとる勇気はなかなか出ないものである．本書の著者も，そうした論理上の合理性を追求するのではなく，三角関数は既知のものとして一旦認めておき，「定積分（第 4 章)」，「微分（第 5–6 章)」，「広義積分（第 8 章)」，「曲線の長さ（第 9 章)」，「面積（第 9 章)」，といった道具を順に揃えた上で，最後の付録 C において，上記の手順に沿った本格的な定義が与えられる．同様に，しばしば循環論法の疑いがかかる極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ については，一旦これを認めて三角関数の微分を計算（第 7 章）したのち，同じく付録 C で，高校数学でもポピュラーな扇形の面積を利用した証明が正当化される（もちろん，循環論法にあらず)．

ちなみに，三角関数の定義に至るこのルートは，本書を貫く 1 つの伏線である「楕円積

---

[3]このようなアプローチをとる書籍も少なからず存在しており，古くは，Karl Weierstrass (1815–1897) の弟子 Otto Stolz (1842–1905) による，1885 年の教科書に見られる．

[4]私自身も，ε-δ 式に関数の連続性を定義するような解析学を教えたとき，連続関数から一様連続性の定義に至り，そのまま（微分をすっとばして）リーマン積分を定義したこともある．

分」の話と並行している．本書はまず第 1 章において，高校数学では「不定積分（原始関数）の値の差」として定積分を定義したことに触れ，「不定積分が求まらなかったらどうする？」という至極もっともな問いから，区分求積法によるリーマン積分の導入が動機づけられている．実際，振り子の周期や楕円の弧長を表現する「楕円積分」の計算においては，その被積分関数の不定積分が初等関数で表現できないことから，「不定積分の値の差」という計算方法が行き詰まってしまう．理論上というより，実用上の必然として，リーマン積分を学ぶ必要があるということである（リーマン積分の定義はそのまま数値計算にも活用できるし，誤差評価も難しくない）．とくに楕円の弧長については，その特殊な場合である「円の弧長→定積分による逆三角関数の定義→三角関数の定義と周期性」という流れがそのまま適用できて，楕円関数とその周期が定式化される．このアイディアは，後の代数曲線やリーマン面の理論として発展するわけで，「定積分」や「逆関数」といった素朴な解析的概念が大いに活躍することになる．

（ウ）ロルの定理・平均値の定理を利用しない理論構成.　「標準的」な教科書だと，ロルの定理は「テイラー展開」（平均値の定理を含む）の証明に使われ，平均値の定理は「微分の正負と関数の増減の関係」や「微積分学の基本定理」を示すときにも利用される．ここでしばしば問題とされるのは，平均値の定理が，1 変数関数の微分だけに通用する主張だということである．微分も，たとえばフレッシェ微分のように多変数（無限次元の変数も含む）関数について自然な拡張があるし，積分についても，リーマン積分やルベーグ積分において，次元そのものは本質ではない．すなわち，「理論の高次元化」というさらなる目標を設定したとき，平均値の定理はあまりに 1 次元的すぎるのである．そこで，代替案として提案されがちなのは「有限増分不等式」なのだが，本書は一味違ったアプローチをとる．

まず「テイラー展開」は，C^{n+1} 級関数という仮定のもとで部分積分を繰り返すことで導出する（第 6 章）．剰余項にはインテグラル記号が残るため少し警戒心を抱いてしまうが，剰余項の絶対値評価（＝誤差評価）は意外と簡単で，実用性も高い．

「微分の正負と関数の増減の関係」については，「微積分学の基本定理」からの自然な流れとして導かれる（第 5 章）．これも，微分より先に積分を学ぶことのご利益といえるだろう．

また，「微積分学の基本定理」の証明（第 5 章）では，ハイネ・ボレルの被覆定理が本質的な役割を果たす．微分係数は平均変化率の極限，という定義に立ち返った，ある意味で「自然な」証明であり，高次元化を意識した理論構成でもある．ただし，その議論は初学者にとって決してやさしいものではなく，本書で一番の山場かもしれない．上記（ア）と（イ）においては，本質的に高校数学の流れに寄り添った形であったものが，この点に限ってはキッパリと別の手段が提示されており，本書が「解析学」の入門書としてその立場を明確にしている部分ではないかと思う．

4　まとめ

以上，ごく簡単に，本書の特徴的な点を拾いあげてみた．「標準的ではない」ルートを通るとはいえ，本書が微積分学の理論構成として目指す頂上は同じである．それがどれだけ配慮に満ちたものであっても，高校を出たばかりの若者が，自分の足で最後まで登りつめるには，相応の忍耐が必要となるだろう．学生の皆さんに勧めるなら，「この本は，見かけよりも深い内容を扱っていて，1 変数関数の解析学の入門書なんだよ」と添えてあげると良いかもしれない．

個人的には，著者の語り口がとても良い，と思っている[5]．私たちが講義するときに，板書の合間にぽつりと口に出しそうなひと言，あるいは，いいたくても，「あたりまえすぎるかな」とか，逆に「専門的すぎるかな」とか思っていえないような，ちょっとした本音の部分も随所に語られている．「標準的な」授業のあとに，質問に来た意欲ある学生さんたちと話しているときのような，そんな気分が感じられるのである．著者は数学だけじゃなく，読者のこともつねに気にかけていることが伝わってくるし，読者のほうも，この著者は自分を置いてけぼりにはしない，という安心感をもって読み進められる．こういう心配りの有無が，授業や書籍の親しみやすさを大きく左右するというものだ．

本書は，そうしたコミュニケーション術まで含めて，「10」を知る著者にしか書けない本である．

[5]加えて，図のセンスも抜群に良いと思う．