

鈴木悠平氏の令和7年度科学技術分野の 文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科
河東 泰之

鈴木悠平さんが2025年の文部科学大臣表彰若手科学者賞を受賞した。2019年の日本数学会賞建部賢弘奨励賞「位相力学系に由来する作用素環の研究」、2023年のFrontiers of Science Award（中国・北京で開かれたInternational Congress for Basic Scienceで授与）につぐ受賞でたいへんおめでたいことである。

鈴木さんは、北海道大学の理学部数学科で岸本品孝教授から作用素環論の指導を受けた後、東京大学大学院数理科学研究科の大学院修士課程に2011年に入学した。私が指導教員となったが、鈴木さんは最初から独自に研究を進めており私の指導はほぼゼロである。ただし博士課程在学中には指導委託の制度で、京都大学数理解析研究所の小沢登高教授の指導を受けており、これはたいへん有益なものだったと考えている。博士号取得後は、千葉大学での学振特別研究員PD（受け入れ教員：松井宏樹教授）1年と、名古屋大学大学院多元数理科学研究科でのテニユアトラック助教3年を経て、2020年4月から、北海道大学大学院理学研究院数学部門での准教授を務めている。

業績について説明する前に、上に書いた中国でのFrontiers of Science Award受賞について少し触れておこう。International Congress of Basic Scienceについては私が『数学通信』第28巻第3号(2023)に記事を書いたが、中国が力を入れて2023年に創設し、その後毎年夏に開いている大規模学会である。会場はYauが所長を務めるBeijing Institute of Mathematical Sciences and Applications（北京雁栖湖応用数学研究院）だ。この学会では2025年に森重文氏を受賞したことでも話題になったBasic Science Lifetime Awardという最高賞があり、そのほかにも論文賞であるFrontiers of Science Awardを多く出しており、鈴木さんはこの賞を初回の2023年に関数解析部門で受賞している。さらにその後の、2024年、2025年にはこの関数解析部門の選考委員も務めている。この賞は「多く出しており」と書いた通り、鈴木さんが受賞した2023年には数学で86件の賞が出ているのだが、そのレベルはたいへん高く、この86件の対象論文のうち33件がAnnals of Mathematicsに載ったものである。またこの86件の中にはFields賞受賞者9人が含まれている。この年の日本人受賞者は6人だが、その中には柏原正樹氏、中島啓氏がいる。このような高い国際的評価が、今回の国内での受賞につながったと考えている。

さて研究の内容に入るが、まず作用素環論の基礎的な設定から始めよう。作用素環とは、Hilbert空間上の有界線型作用素のなす環で、*演算と適当な位相で閉じているもののこと

である． Hilbert 空間が有限次元の時は，その上の線型作用素は自動的に有界となり，それは行列で表される． 行列の空間の上のまともな位相は一種類しかなく，すべての部分環（あるいはもっと一般に部分空間）が自動的に閉となるので， $*$ 演算（行列の時は共役転置行列を取る操作）で閉じているということだけが部分環に要請される条件である． この条件は作用素環論が量子力学や群のユニタリ表現論に関連して誕生したことからわかるように自然な条件であり，これを落としてしまうと無限次元の Hilbert 空間上ではほぼ何もできなくなってしまう． 同様の理由により，Banach 空間上の有界線型作用素のなす環を考えることもできるが，きれいな一般論は何もないと言ってよい． 適当な位相には，ノルム位相（Hilbert 空間の単位球上の一様収束の定める位相）と，作用素の強位相（Hilbert 空間上の各点収束の定める位相）があり，前者で閉じている作用素環が C^* 環，後方で閉じている作用素環が von Neumann 環である． 作用素の強位相の方が（その名前に反して）弱い位相なので，こちらで閉じているという方が強い条件である． したがって von Neumann 環は C^* 環の特別なものということになる． Hilbert 空間上の有界線型作用素たちの空間上の自然な位相はほかにもいくつもがあるが，それらで閉じている作用素環を考えても von Neumann 環と同じクラスにしかならないので，今はそれらを考えなくてもよい．

さて行列の積が非可換だということは線型代数を習う際に真っ先に強調されることである． だから作用素環論でも当然非可換環を考えることになるが，可換環が出てきてはいけなわけではない． C^* 環が（乗法単位元を持って）可換であれば，ある compact Hausdorff 空間 X に対して， $C(X)$ （ X 上の複素数値連続関数環）に同型になること，von Neumann 環が可換であれば，ある測度空間 (Ω, μ) に対して $L^\infty(\Omega)$ に同型になることが古くから知られている． なお上に，von Neumann 環は C^* 環の特別な場合だと書いたが，実はごく基礎的な理論以外ではそう思ってもあまりよいことはない． たとえば $L^\infty([0, 1])$ はある compact Hausdorff 空間 X に対して， $C(X)$ に同型であるが，そのような X は (hyperstonean と呼ばれる) ずたずたに不連結な空間であり，たとえば多様体などとはかけ離れている． そこで作用素環論では，von Neumann 環と C^* 環は作用素環の別のクラスであり，共通部分は有限次元作用素環しかないと思った方が自然であることが多い． たとえば von Neumann 環がノルム位相で可分になるのは有限次元環の場合だけである．

ここで可換環の場合として参考になるのは単に compact Hausdorff 空間と測度空間というよりは，compact Hausdorff 空間上の同相写像を考えるという意味での位相力学系と，測度空間上の全単射で自分自身も逆写像も可測なもの（で測度，または測度の絶対連続の意味での同値類も保つもの）を考えるという意味での可測力学系との類似性である． この二つの間にはさまざまな類似性があることが知られており，たとえば双方でのエントロピーの理論ではかなり類似の議論ができる． 位相力学系や可測力学系からは，関数環と群作用による接合積（群や環の，群による半直積と類似の構成）という構成で関数環を含む C^* 環

や von Neumann 環が作れるので、力学系は作用素環論と直接に結び付いている。このことは von Neumann 環の場合には von Neumann 自身の時代から知られていた古い事実である。さらにこの一般化として、可換ではない作用素環の上の自己同型や群作用から接合積を作ること、元の自己同型や群作用の性質と接合積の性質の関係を調べることも、長年にわたる作用素環論の基本的な問題である。

上に書いた位相力学系と可測力学系の類似性は実はもっとはるかに一般的な状況で C^* 環と von Neumann 環の間に成り立つ。すなわち片方で成り立つ定理、使えるアイデアやテクニックに類似のものがもう片方でも成り立ったり使えたりするということがよくあるのである。これについては、そもそも類似が成り立たない場合、定理のステートメントから証明まで簡単に翻訳できる場合、類似の結果は成り立つがその証明がずっと難しくなる場合、片方の結果をもう片方に翻訳するといくつもの場合に分かれる場合、何が正しい類似なのかを見抜くこと自体が難しい場合、大枠では類似しているが、もう片方に翻訳すると違いや新しい現象が発生してそれが難しく、また面白い場合など、いろいろなものがある。鈴木さんが活躍しているのはこの後の方のケースにあたるものである。

その C^* 環と von Neumann 環の類似が成り立つ場合と成り立たない場合の話をするにあたって、重要な性質が従順性 (amenability) である。この重要な性質は当初、離散群に対して von Neumann が導入した。作用素環論の元祖と、作用素環論において決定的に重要なこの性質を導入したのが同一人物であるのは興味深い。整数群 $\mathbb{Z}$ が従順群の典型例であるが、 $\mathbb{Z}$ の場合の定義は $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上に平行移動不変なノルム 1 の正值線型汎関数が存在するということである。(汎関数が正值とは、正の値のみを取る数列に対し正の値を返すことである。) しかし自分でそういう汎関数を具体的に作ってみようとするれば全然作れないことがわかるであろう。これは選択公理によって得られる超越的なものだからである。この定義を一般の離散群に拡大したものが考えられ、このほかにも同値な言い換えがとてもたくさんある。また局所 compact 群の場合の従順性の定義もある。離散従順群の例は次のとおりである。まず有限群は自明に従順である。可換群は従順である。また離散従順群のクラスは、商群、部分群、帰納極限、群の拡大を取る操作で閉じている。したがって特に可解群は従順である。一方、生成元の数 2 個以上の自由群は従順ではない。またたいていの行列群 (たとえば $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$) は従順ではない。この従順性は群から始まって、作用素環の従順性、部分環の従順性、テンソル圏の従順性などさまざまな方向に一般化されており、いずれも作用素環論において重要なものである。

現代的な作用素環論における分類理論は Connes の 1970 年代の業績によって始まった。ここで分類理論とは、作用素環自体や、自己同型、群作用、自己準同型、部分環、加群、双加群などについて、簡単な完全不変量を見出す、さらにその完全不変量の取りうる値を列挙する、といったことを指す。Connes 以来の von Neumann 環の分類理論で分かってきたこ

とは、何らかの意味での従順性があれば、このような分類理論が可能であること、従順性の仮定を落としたらこのような分類理論はまったく不可能であること、またこの二つの場合にはっきり別れて、その中間はないということである。この路線が華々しい成功を収めたため、 C^* 環でも上で書いた類似性に基づき、従順性の仮定のもとで同様な分類理論を目指そうという研究が過去 40 年以上にわたって行われてきた。特にある種の C^* 環そのものを、適切な従順性の仮定の元で分類することを目指す Elliott program は大きな成功を収めた。

さて長い前置きの後にやっと鈴木さんの業績の説明である。離散群の作用についても従順性の概念があるのだが、von Neumann 環の場合は環が単純（因子環と呼ばれるもので可換から遠いことを意味する）であれば、従順でない群の従順な作用は存在しないことがわかっていて、そこで上述の類似性に基づき、 C^* 環でもそのような例はないと思われていたのだが、任意の局所 compact 群に対してそのような例を構成したのが鈴木さんの 2019 年の J. Noncommut. Geom. の論文であった。これは 2002 年の Anantharaman-Delaroche による二つの問題を否定的に解決し、多くの研究者の漠然と持っていた予想を打ち砕いた驚くべき成果であった。その後鈴木さんはさらに進めて、2021 年の Compos. Math. の論文で、完全群と呼ばれる、従順群よりはるかに広いクラスの離散群に対し、Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ と呼ばれる重要な C^* 環上のしかるべき従順作用は適当な意味で一意的であることを証明した。これまでの作用素環の歴史では、このような種類の一意性は従順群の作用に限られており、従順でない群についてこのような結果が証明できるとはまったく思われていなかった。私も当時セミナーでこの結果の講演を聞いてとても驚いたことを覚えている。さらにその後、小沢登高氏との共著論文 (Selecta Math. 2021 年) で群作用の従順性について多くの同値な特徴づけを得ており、この流れはその後の作用素環上の群作用の分類理論の発展に大きな影響を与えている。また、2020 年の Comm. Math. Phys. の論文では群作用から生じる作用素環のある種の包含関係に対し、その中間作用素環の特徴づけを与えている。このような中間作用素環の特徴づけでは、Galois 理論型の部分群と中間作用素環の対応が有名だが、この論文では独自の視点から新たな特徴づけを得たもので、すでに様々な方面に応用されている影響力の大きい論文である。最初に書いた中国の Frontiers of Science Award の対象となったのはこの論文である。

以上駆け足で見えてきたが、鈴木さんの業績の特徴は新しい構造を見出す独創性である。技術的に難しい問題を解くタイプの研究者は世界中にいるが、こちらのタイプの数学者は貴重である。また鈴木さんのこれまでの論文は、上で書いた小沢登高氏との共著論文 1 本、上の研究の流れとは違うもう 1 本を除き、すべてが単著であることも特筆に値し、これも高い独創性を裏付ける一つの証拠である。これからも日本の、また世界の作用素環論をリードする研究者として活躍することを期待している。