

会員ニュース

金子昌信先生の令和 7 年度科学技術分野の 文部科学大臣表彰科学技術賞ご受賞に寄せて

東北大学大学院理学研究科

大野 泰生

金子昌信教授（九州大学大学院数理学研究院）が令和 7 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰科学技術賞を受賞されました。大変喜ばしく、心よりお祝いを申し上げます。ご受賞の業績名は「多重ゼータ値の研究」とのことで、2017 年度の金子氏の代数学賞受賞業績「準保型形式と多重ゼータ値の研究」に続いて、多重ゼータ値が挙げられました。もとより金子氏は、保型形式、楕円曲線、ゼータ関数および Bernoulli 数に関連する広範な領域で活躍されておりますが、ここでは今回のご受賞の業績「多重ゼータ値の研究」にまつわる金子氏との思い出とお仕事の話を、緩々と書かせていただくことにいたします。

金子氏が多重ゼータ値の研究を“本格的に”始められる直前の時期に、筆者は金子氏にお目にかかる機会を数回得て、ひょんなことから「多重 Bernoulli 数」を定義されたプレプリント“Poly-Bernoulli numbers”（当時未出版であったのもひょんな外的理由から）を頂きました。時期としては冬、金子氏が京都工芸繊維大学にご所属であった最終年度（1995 年度）にあたり、筆者は大阪大学の博士後期課程 1 年生でした。工芸繊維大の研究室へ伺うと、福岡への引っ越し準備を徐々に始めておられるご様子でした。多重 Bernoulli 数とは、金子氏が定義された Bernoulli 数の一般化です。指数型母関数による Bernoulli 数の定義は一般的ですが、その簡素な分子を“わざわざ！”

（実際は杉浦光夫著『解析入門』からヒントを得て）対数関数による表示に書き換え、その対数関数を（当時欧州などで盛んに研究されていた）ポリログ（多重対数関数）に置き換える手法で一般化したものです。ポリログの添え字が、1 の場合は古典的な Bernoulli 数に戻り、正整数の場合は有理数、非正整数の場合は整数の列となります。ポリログを用いた拡張ということで、poly-Bernoulli と名付けられました。おそらく多数の数値実験を経て与えられたこの一般化は、不思議なほど絶妙で、数論および組合せ論的対象との結びつきが極めて良いことがわかっています。当時、筆者も数値計算をしてはさまざまな予想を立て、その一部に証明をつけて金子氏にお知らせしたり

していました。

そうするうちに、金子氏から第 2 のプレプリントが送られてきました。当時、立教大学に居られた荒川恒男氏との共著で、いわゆる“荒川-金子のゼータ関数” (ξ 関数とも) を導入された論文でした。Riemann ゼータ関数の負整数点での値に Bernoulli 数が現れることはよく知られていますが、この論文では、負整数点での値に多重 Bernoulli 数が現れるように工夫して定義した ξ 関数 (ちょうど、Riemann ゼータ関数 (の積分表示) のポリログによる一般化になっている) について、様々な考察が行われていました。Riemann ゼータ関数の場合は正整数点での値が再び Bernoulli 数で書けて、自己双対的な関数等式の存在に繋がるわけですが、 ξ 関数の正整数点の場合は (多重 Bernoulli 数ではなく) 多重ゼータ値が現れる、ということをつえた定理が特に目を引きました。つまり大まかに見て、荒川-金子の ξ 関数とは、負整数点では poly 化され、正整数点では multi 化 (多変数化) された、Riemann ゼータ関数なのだ、ということになります。思い返してみると、この ξ 関数の振る舞いが大きな契機となってその後、金子氏は (そして筆者も)、多重ゼータ値を本格的に取り扱うことになっていったのでした。

多重ゼータ値 (multiple zeta values) とは、Riemann ゼータ関数の正整数点での値の、通常の Dirichlet 級数表示において、分母を (大小関係を定められたランニングインデックスに関して) 多重化した多重級数の極限値のことです。古くは Goldbach 氏と Euler 氏の書簡まで遡ることができ、近年の数論分野では M. Hoffman 氏や D. Zagier 氏などが先導的研究を行って大きく発展している分野ですが、結び目の不変量や場の量子論における Feynman 積分など、様々な領域で自然と顕れていたことも知られています。現在では、(研究の進展につれて派生した対象も含めるなど) より広い意味でも「多重ゼータ値」という名称を用いることがあります。

序盤の思い出話でも触れましたように、金子氏は荒川氏とともに、正整数点での値が多重ゼータ値で書け、負整数点での値に多重 Bernoulli 数が現れるような、Riemann ゼータ関数の一般化である“荒川-金子のゼータ関数” (ξ 関数) を導入しました。自己双対的な関数等式や Euler 積表示などは望めそうにないものの、とても興味深い性質をもち、 ξ 関数を經由して多重ゼータ値の双対的な性質の解明や和公式の理解が進むなど、とても有用な対象です。その後も、金子氏と津村博文氏の共同研究において ξ 関数の“双子の兄弟”として η 関数が導入されたほか、P. T. Young 氏によって p 進版荒川-金子のゼータ関数が導入されるなど、 ξ 関数の更なる拡張や派生的研究が生まれ続けています。

井原健太郎氏および Zagier 氏との (専門家に IKZ と呼ばれている) 共同研究では、

多重ゼータ値の間の正規化複シャッフル関係式を示しました。また、それ以前に金子氏が予想して井原氏と部分的に証明を得ていた、一般次数での導分関係式も示しています（次数 1 の場合が Hoffman 氏の導分関係式と同値）。

H. Gangl 氏および Zagier 氏との（専門家に GKZ と呼ばれている）共同研究においては、2 重ゼータ値の空間とカस्प形式（周期多項式）の空間との衝撃的な新関係を明らかにし、その後の多重ゼータ値とモジュラー形式の関連（モジュラー現象）の研究の先駆けになりました。また、同論文で導入した 2 重 Eisenstein 級数のレベル 2 版と、 $\Gamma_0(2)$ のモジュラー形式との直接的な関係を掘り下げた、田坂浩二氏との共著論文は、その後のこの方向の大きな発展の礎となっています。

Zagier 氏との次なる共同研究では、“有限多重ゼータ値”（多重ゼータ値の簡易版アデル化と言っても良い）を新たに定義し、更にその実対応物と考えられる“対称多重ゼータ値”も導入し、この両者の著しい関係についていわゆる“金子-Zagier 予想”を提出して大きな反響を呼びました。これは、従来の多重ゼータ値のなす環を $\mathbb{Z}(2)$ の生成するイデアルで割った剰余環と、有限多重ゼータ値のなす環の同型性を具体的な写像とともに主張する予想です。

レベル 2 や 4 の多重ゼータ値（“多重 T 値”，“多重 T チルダ値”）の研究については、津村博文氏との牽引的な共同研究を複数の論文として発表していて、その中には、組合せ論的にも興味深い現象（Entringer 数が自然に現れることなど）も報告されています。

更に、山本修司氏との共同研究では、ある初等的な多重級数の多重積分表示（“積分級数等式”と呼ばれる）の両辺を各々多重ゼータ値で記述することで得られる関係式族が、多重ゼータ値のすべての線型関係式を生成するであろうという、大変著しい予想を提出しています。これまで避けて通ることの難しかった、正規化の議論を経ないで、全関係式の生成を予想した画期的なものと言えます。

このほかにも例えば、組合せ論的にも興味深い多重 Bernoulli 数のさらなる一般化や、Euler の定数の有限類似の研究など多々ありますが、ここでは挙げきれておりません。金子氏が多重ゼータ値の現代的な研究を始めてから概ね 30 年と思われますが、上記を含む多くの研究成果、および数値実験と予想によって、日本のみならず世界の多重ゼータ値関連の研究を強く牽引し続けておられます。

その初期から、金子氏は多重ゼータ値に関する集中講義を内外問わず精力的に行ってこられました。対象そのもののおもしろさと垣間見える発展への期待感、そして多数の分野との興味深い繋がり（とその予想）、それらに金子氏ご自身の人を惹きつける魅力的なお人柄も相まって、瞬く間に研究者層の広がりを見せたのでした。九州大学金子研究室の歴代院生とポスドクの方々の活発な研究成果の数々も、その勢いを加速

させました。

金子氏の著書の中で、『ベルヌーイ数とゼータ関数』（荒川恒男氏、伊吹山知義氏との共著、牧野書店（2001））は、共立出版から新装版（2022）、そして Springer から英語版が出る程の反響があり、また講義録『多重ゼータ値入門』（荒川氏との共著、九州大学 COE レクチャーノート）はこの分野の最重要入門書となっています。数理解析研究所講究録やサマースクール報告集への寄稿も広く読み親しまれています。勉強会や研究集会の主催も多く、現在まで 3 年毎に開催され続けている RIMS 共同研究（公開型）「多重ゼータ値の諸相」の初回（2001 年）は金子氏の主催によるものです。科学研究費のプロジェクトとしては、基盤 S（2016～2020 年度）を獲得して九州大学に「多重ゼータ研究センター」を設置し、現在も基盤 A（2021～2025 年度）のプロジェクトが継続しています。今年の 2 月には、ここまでの集大成とも言える形で、第 17 回日本数学会季期研究所 (MSJ-SI) 「Developments of multiple zeta values」として、多くの海外研究者を招き 2 週間の有意義な研究集会が開かれました。来春はハワイ大学で大きな研究集会を主催されることになって、若手研究者の参加を後押しされています。金子氏の魅力的な研究に加え、このような献身的努力にもよって、この分野の広がり発展はもたらされていると言えます。

本稿序盤の思い出話では、多重 Bernoulli 数と ζ 関数に導かれるようにして、多重ゼータ値の研究へと進まれたご様子を記しました。けれどもその後の早い段階から金子氏は、「多重ゼータ値の研究とは、若いころに伊原康隆先生のもとで研究していた $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群の Galois 表現の、Hodge サイドだった、と気づいて深い縁を感じた」と話されるようになり、数学の不思議な縁と導きを筆者も感じました。

例えば、「金子氏と言えば j 関数！」などのように、金子氏が扱われてきた多様な研究テーマと興味深い成果のそれぞれに、熱烈なファンが多いこととは思いますが、本稿では受賞業績に挙げた「多重ゼータ値の研究」に関して、きっかけやご本人の手による研究などのお話を書かせていただきました。冒頭で少し触れた代数学賞受賞の際の授与理由には、「金子昌信氏は、ある意味で既成の分野に分類することが難しい、様々な研究を行っていますが、どれも斬新で、また、いささか不思議な印象を与える研究で、新しい分野を切り開き、また数学を豊かにしてきた業績は極めて大きいといえます。」との一文があることの紹介に、ここでは留めます。「まさしく！」というほかありません。

この度の「科学技術分野の文部科学大臣表彰 科学技術賞」のご受賞、まことにおめでとうございます。