

書 評

証明の読み方・考え方 —数学的思考過程への手引き—

Daniel Solow 著，西村康一，服部久美子 訳，共立出版，2023 年

東京科学大学理学院

皆川 龍博

本書は Daniel Solow 著「Introduction to How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes, 6th Edition (2014)」の翻訳本である。原著の初版は 1982 年であり，1985 年に初版邦訳本が同じく共立出版より刊行された。原著初版邦訳本においては全訳であったが，本書は初版内容を中心とした原著第 6 版の抄訳である。

大学以降の数学において，証明問題を解く上での思考方法や証明の書き方は，数学を学ぶ中で自然と身につくことが多い。この思考方法や証明の書き方に焦点を当て，それらを証明技法として整理し，解説したのが本書である。

さて，本書では 2 種類の読者が想定されている。このそれぞれの読者に向けて，「まえがき」には以下のように本書の目的が述べてある。

学生向け：大学以降で出会うような，抽象数学の証明の読み解き方を学んでもらうこと。
教員向け：抽象数学の証明の説明において，証明技法の見地を加えることで，数学的思考過程を学生に教えることが可能になる利点を知ってもらうこと。

また，第 1 章には，本書の目的がより詳しく記されている。それは，「証明技法」を分類し，使い方を説明することで，証明の読解を会得できるよう導くというものである。この「証明技法」の数学における位置付けを，著者は以下のように述べている。

数学の教科書，専門書にある証明は数学に慣れた人向けであり，その読解には，数学の基本的な「文法」を学ぶ必要がある。その文法にあたるものが証明に用いる技法，つまり「証明技法」である。加えて，著者はこの「証明技法」を用いる有効な場面についても，本書の中で説明している。これは，既知の数学的事実の証明を自分でも書けるようになってほしいという著者の意図によるものだ。確かに，証明技法が紹介されているほとんどの章で，証明技法の「読み方」「使い方」が記されており，本書の目的を叶えるのに沿った構成と言える。著者は，最終的な目標は未知の数学的真理を自分の手で証明できるようになることとしている。本書を読むにあたって著者は，前提知識として高校程度の数学知識があれば十分としており，章末にある練習問題の内容を見ても，大学で習う微分積分学や集合論の問題も含まれてはいるが，初歩的な内容のみである。

本書の構成は証明技法を解説している全 15 章の本文と 2 つの付録から成る。本文の証明技法の解説に入る前に、後述する技法への理解を深めるため、付録の内容について触れておきたい。付録 I では、集合の等号の証明や、写像の全射、単射の証明といった初歩の集合論の証明に、証明技法の観点を加えている。付録 II では、大学 1 年生の微分積分学で、学生が躓きやすい上限・下限や数列の収束に関する証明を、証明技法の観点から解説することで、証明の行間を埋める作業を行っている。

ここからは、実際にどのような証明技法を本書で解説しているのか、紹介していきたい。本書の後半部で解説されている証明技法は、背理法や帰納法といった耳に馴染みがあるものも多いが、その後半部は前半部の証明技法との関連をもって解説されている点が特徴的である。そういった意味で、本書の中核を成しているのは、初めの 6 章の内容であると言えるだろう。また、本書で紹介されている証明技法のほとんどは、主張の中の「キーワード」に着目することで、どの技法をいつ用いたら良いのかが分かるようになっている点も、強調しておきたい。

実際に紹介されている証明技法は以下のものである。

- ・前進後退法 (第 2 章) 「A (仮定) ならば B (結論)」を証明する方法で、前進法は仮定から導かれる主張を得ることであり、後退法は結論に対する十分条件を得る方法である。前進法で得られた主張と後退法で得られた主張が一致することを目標とする。第 1 章において、証明技法をすでに知っている読者に向けては「はじめの 2 章を読んでから第 15 章のまともに進み」と提案しているように、本書の軸となる証明技法である。

- ・構成法 (第 4 章) 後退法の過程で「存在する」というキーワードが現れたときに有用な証明技法。求める対象を具体的に構成するなどして証明する。構成したものが実際に求める対象であることの確認も忘れてはならない。

- ・抽出法 (第 5 章) 後退過程で「すべての～に対して」というキーワードが現れ、結論として「ある性質をもつすべての対象について、あることが成立する」ことを証明するときに用いられる技法。ある性質をもつもの 1 つを任意に選んで (抽出して)、選んだ対象について「あることが成立する」という前進後退法が適応できる結論を作り出す。

- ・特殊化 (第 6 章) 前進過程で「すべての～に対して」というキーワードが現れ、主張の仮定が「ある性質をもつすべての対象について、あることが成立する」という内容であるときに有効な技法である。特殊化では「ある性質」を持つ特定の対象を後退過程から見つけ出し、その特定の対象について「あることが成立する」ことを前進過程での新たな主張とする。

- ・背理法 (第 9 章) 前進後退法では証明が上手くいかないような主張に出会った場合の他の手段として、背理法を紹介している。背理法は「A ならば B」という主張を示すのに、A かつ「B の否定」から前進し矛盾を導く方法である。この方法は B に「・・・ない」とい

うキーワードを含むときに有用である。この技法の難しさとして、著者は、どのような矛盾が導けるかゴールが見えないまま、前進過程を推し進めるしかないことを挙げている。

- ・対偶法（第 10 章）背理法の 1 種であり、前進過程でも「・・・ない」というキーワードが出てきた場合に有用な証明技法である。「A ならば B」を示すために、「B の否定 ならば A の否定」を前進後退法を用いて示すことになる。

- ・一意性の証明法（第 11 章）一意性の証明においては、前進過程で一意性の条件が現れる場合と、後退過程で一意性が示すべきこととして現れる場合とがある。前進一意法（前進過程に一意性。前進法の中で一意性を用いる）、直接一意法（後退過程に一意性。証明は前進後退法で行う）、間接一意法（後退過程に一意性。背理法を用いる）が紹介されている。

- ・帰納法（第 12 章）高校で習う数学的帰納法が、本書の後半で紹介されている。結論に「すべての」というキーワードがある場合の証明技法として第 5 章にて抽出法が有用であると解説していたが、「ある数以上のすべての整数について」という特殊な形の文言が結論にある場合は、帰納法が有効であると著者は述べている。

- ・二者択一法（第 13 章）第 13 章では、主張に「または」を含むものの証明法を扱っている。場合分け法（仮定に「A または B」を含む場合）と部分否定法（結論に「C または D」を含む場合）を紹介している。部分否定法は結論の片側を否定して、他方の結論を導く証明技法である。

- ・最大最小の証明法（第 14 章）最大最小の証明では、主張を量化詞を含む同値な主張に書き換えることで、構成法、抽出法、特殊化などの証明技法が適用可能なことを解説している。ここまで紹介した証明技法の、具体的な適用例を説明した章である。

また、上では扱わなかった、証明技法が紹介されていない章についても触れておく。第 3 章は前進後退法における定義、命題の利用について解説している。第 7 章は、「すべての」、「存在する」といったキーワードが主張に複数含まれる場合を扱っている。第 4～6 章の応用的な位置付けである。第 8 章は否定の書き方を扱っている。背理法、対偶法を考える上で必要な導入であろう。第 15 章はそこまでに本書で紹介した証明技法の「まとめ」となっている章である。

本書の読後、実際に学部 2 年生の問題演習で証明技法の観点を意識しながら助言を行ったところ、学生の反応が普段より良いように思われた。教員としても、証明技法という観点を持つことで、学生の思考過程の間違いも発見しやすくなったと感じる。本書は、教育の観点からも確かに有用な著書であると言える。

大学で教鞭を執っていると、高校までの数学は良く出来たが、一転、大学では不得意になり、元気を無くしていく学生に少なからず会おう。そんな学生に、一度手に取ってほしい本である。