

複雑な系の上を熱はどのように伝わるか？

早稲田大学理工学術院

熊谷 隆

本稿は、2025 年度年会（早稲田大学）に於いて 3 月 21 日に開催された市民講演会で、筆者が表題のタイトルで講師を務めた講演の報告記である。

空間内の熱の伝わり方（熱伝導）の解析方法の一つとして、空間上にランダムウォークやブラウン運動を作り、その性質を調べることで熱方程式を解析する確率論の方法がある。講演では、ユークリッド空間上のブラウン運動から話を起こし、フラクタルのような滑らかさのない空間、さらにはランダムな空間の上にランダムウォークやブラウン運動を構成することで、複雑な系の上の熱伝導の仕方を調べるというテーマについて概説を行った。

以下は、当日用いたスライドに多少手を加えたものである。（パラパラ漫画風の画像の枚数を減らし、著作権関係に抵触する可能性のある図を削除するなどの修正を加えた。）なお実際の講演では、時間の関係でランダムグラフの例の一つである二次元一様全域木の話はできなかった。

実のところ講演会では、残念ながら主要な聴衆である一般の方からの反応は思わしくなく、講演を聴きに来てくれていた数学者の友人に感想を聞いたところ「市民講演会としては、ちょっと難しかったかな...」と言葉を濁されてしまった。そのような内容のスライドを『数学通信』に載せるのはいかがなものかとも考えたが、内容をさらに噛み砕いて分かりやすく解説する自信もないので、スライド*を掲載し批判を甘んじて受けることとする。

*『数学通信』のウェブサイト (<https://www.mathsoc.jp/publications/tushin/index.html>) ではカラー版を掲載しています。

複雑な系の上を熱はどのように伝わるか？

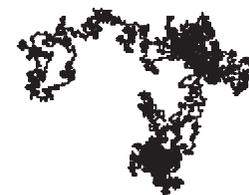
熊谷 隆

早稲田大学理工学術院

2025年3月21日

日本数学会 市民講演会

1



熱の伝導

各々の粒子がランダムに振動することで熱が伝わる。

熱方程式（微分方程式）の解を調べることで解析できる。

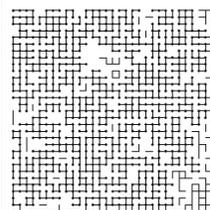
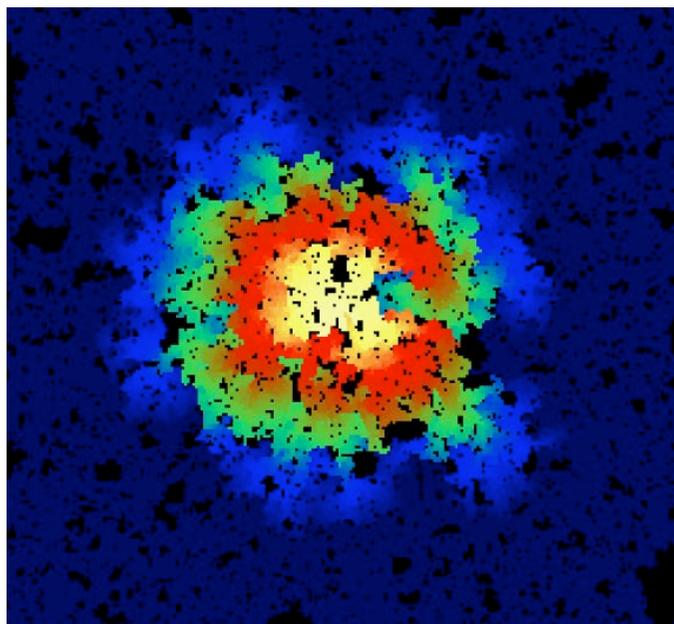
確率論を使った方法

空間の上にランダムウォークやブラウン運動を作り、熱伝導を解析する。

（メリット）●粒子の動きという具体的なイメージがつけやすい

●滑らかさのない空間の上でも、解析できる可能性あり

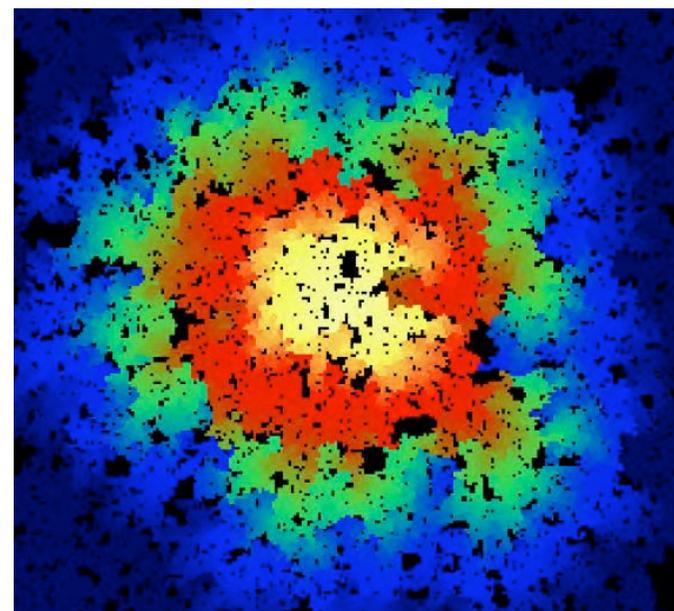
2



複雑な空間の例と
その上の熱伝導の
シミュレーション

© M.T. Barlow

3



© M.T. Barlow

4

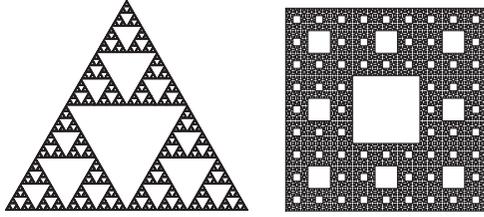
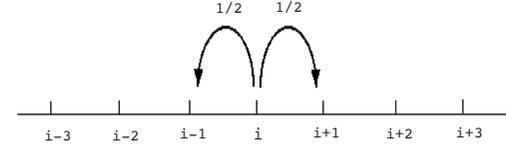


Figure 1: シェルピンスキーガスケットとシェルピンスキーカーペット

フラクタル

一部分と全体の中に自己相似性があるような図形のこと
 マンデルブロ (フランスの数学者、20世紀後半) による造語
 山の稜線やリアス式海岸などギザギザとして複雑な構造

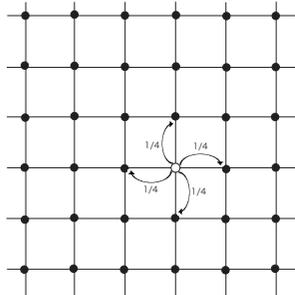


§1 格子上的ランダムウォークとブラウン運動

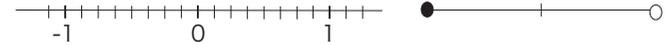
一次元の場合: $\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ランダムな粒子の動き

$$P(S_{n+1} = x + 1 | S_n = x) = 1/2, \quad P(S_{n+1} = x - 1 | S_n = x) = 1/2$$

1秒後に確率1/2で1歩右に、確率1/2で1歩左に動くようなランダムな動き
 一次元 **シンプルランダムウォーク (酔歩)** と呼ぶ。



d 次元正方格子の上でも、シンプルランダムウォークを同様に定義できる。
 例えば、二次元の場合、1秒後に確率1/4で一歩上 or 下 or 右 or 左に動く。



まず、自然数 m に対して $2^{-m}\mathbb{Z}$ 上のシンプルランダムウォーク $\{2^{-m}S_n\}$ を考える。

$m \rightarrow \infty$ の極限として、**実数上をランダムに動く粒子** を作りたい。

しかし、 $2^{-m}S_n$ で、単に $m \rightarrow \infty$ とすると粒子は動かなくなる。

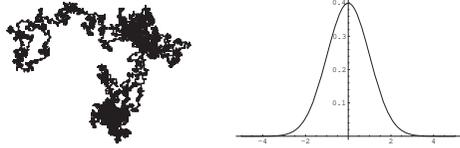
そこで時間のスピードアップをする。

$2^{-1}S_n$ が $\{-1, 1\}$ に着くのにかかる平均時間は? \rightarrow [答え] 4 (= 2²)

$2^{-m}S_{[4^m t]}$ とすると、 $\{-1, 1\}$ に着くのにかかる平均時間は 1。

$$2^{-m}S_{[2^{2m}t]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} B(t) \text{ (実数上のブラウン運動)}$$

*一般に d 次元のシンプルランダムウォークから、同様に d 次元ブラウン運動を作ることが出来る。



ブラウン運動のパスは、確率1で連続関数だが、すべての t において微分不可能!

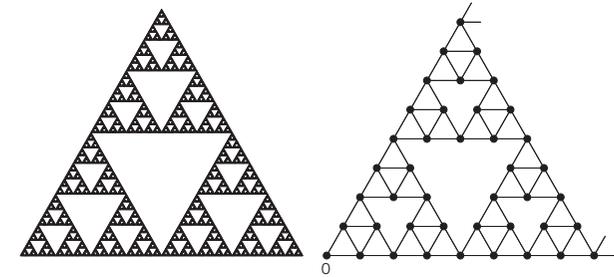
● 熱伝導との関係

f を \mathbb{R}^d (d 次元空間) 上のよい関数とする。

$$u(t, x) = \mathbf{E}[f(B(t)) | B(0) = x] = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right) f(y) dy$$

とおくと、 u は以下の熱方程式の解である。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \quad (\text{ここで } \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}) \\ \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

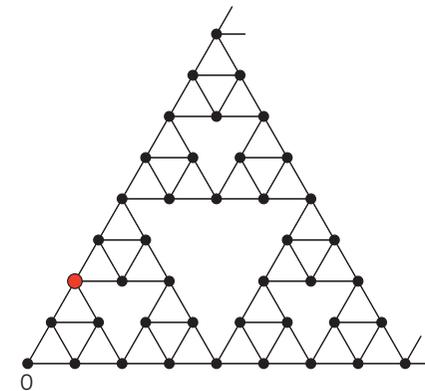
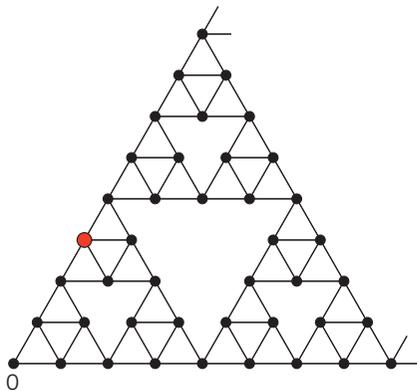


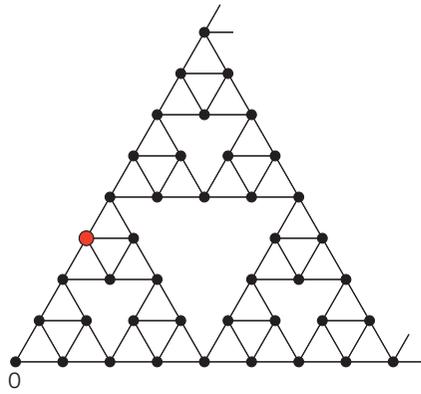
§2 フラクタルグラフ上のランダムウォークとブラウン運動

G : シェルピンスキーガスケットグラフ (上図右、無限に延びたグラフ)。

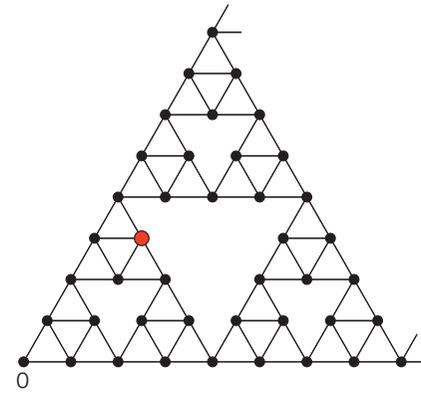
$\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$: G 上のシンプルランダムウォーク

(1秒後にボンドでつながった点に等確率で動くようなランダムな動き。)

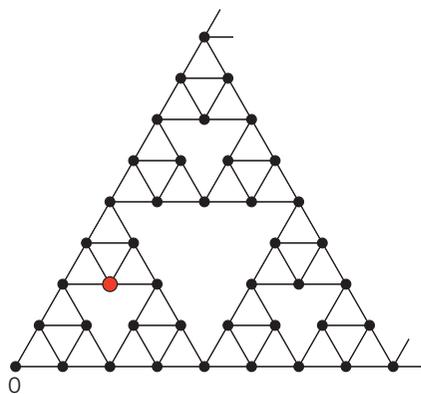




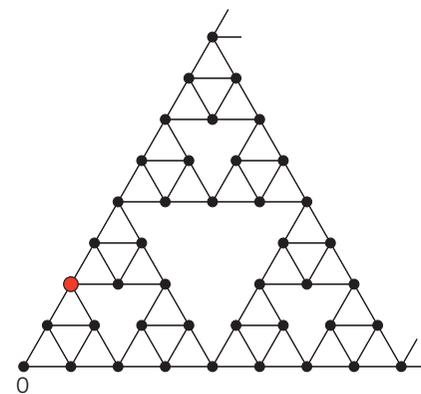
13



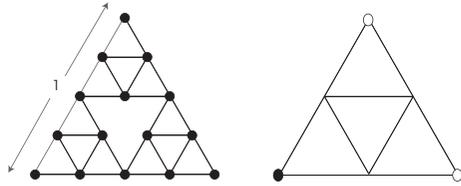
14



15



16



フラクタル上のブラウン運動

$2^{-m}G$ 上のシンプルランダムウォーク $\{2^{-m}S_n\}$ を考える。

$m \rightarrow \infty$ の極限として、ガセット上をランダムに動く粒子を作りたい。

$2^{-1}S_n$ が \circ に着くのにかかる平均時間は？ → [答え] $5 (= 2^{\log 5 / \log 2})$

$2^{-m}S_{\lfloor 5^m t \rfloor}$ とすると、 \circ に着くのにかかる平均時間は 1。

$2^{-m}S_{\lfloor 5^m t \rfloor} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} B(t)$ (ガセット上のブラウン運動) (Goldstein, 楠岡 '87)

対応するラプラス作用素は $5^m \{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f(x_m^i) - f(x) \} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(x)$ (木上 '89)

異常拡散: $\log 5 / \log 2 > 2$ 拡散のスピードが通常の空間より遅い。

ディリクレ形式 (エネルギー) による解析: 福島・島 '92

ポイント: 空間が滑らかである必要はない。

劣ガウス型熱核評価 Barlow-Perkins '88, K '93, Hambly-K '99,

(Carpet) Barlow-Bass '89, '92, '99 注意: $d_f = d, d_w = 2$ ならガウス型

$$c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x,y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right) \leq p_t(x,y) \leq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x,y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right)$$

$$d_f = \frac{\log 3}{\log 2} \text{ (ハウスドルフ次元)}, \quad d_w = \frac{\log 5}{\log 2} \text{ (ウォーク次元)},$$

$$\frac{d_s}{2} := \frac{d_f}{d_w} \text{ (スペクトル次元)}.$$

他にも多くの性質が解析されている。

フラクタルグラフのランダムウォークでも、同じく劣ガウス型熱核評価が

成り立つ (ただし、グラフによっては $p_{2n+1}(0,0) = 0$ となることもある)。

$x = y = 0$ の場合を見ると

$$c_1 (2n)^{-\frac{d_f}{d_w}} \leq p_{2n}(0,0) \leq c_2 (2n)^{-\frac{d_f}{d_w}}, \quad p_n(0,0) \leq c_2 n^{-\frac{d_f}{d_w}}.$$

$p_{2n}(0,0)$: 0 から出発した粒子が $2n$ 秒後に 0 に戻る確率

- ちょっと寄り道 -

- ある点から出発したランダムウォークが、確率 1 で有限時間内に元の点に戻ってくる時、そのランダムウォークは再帰的という。

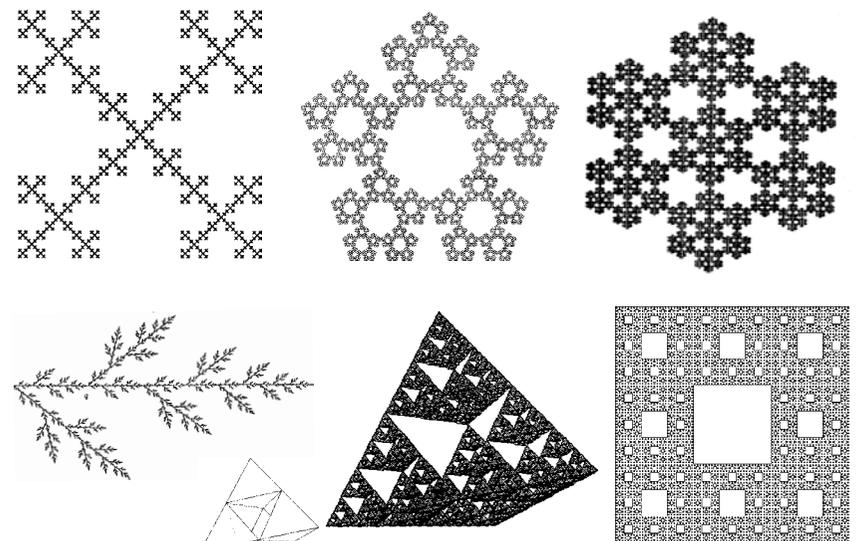
ランダムウォークは、いつ再帰的か?

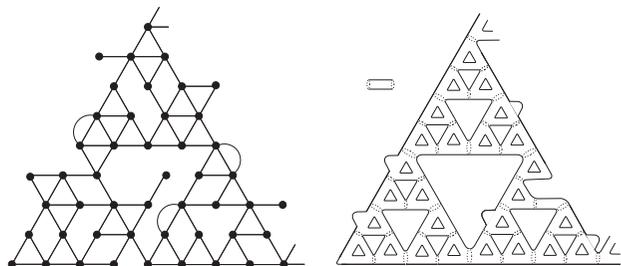
[事実] m を粒子が原点に戻る回数の平均とすると、「再帰的」 \Leftrightarrow 「 $m = \infty$ 」

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0,0) \text{ だから, } m = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{d_f}{d_w}} = \infty \Leftrightarrow d_f \leq d_w$$

したがって、 \mathbb{Z}^d の場合、「再帰的 $\Leftrightarrow d = 1, 2$ 」

解析が進んでいるフラクタルの例





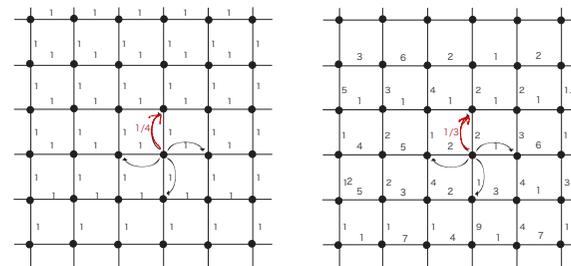
変形したフラクタルグラフ と フラクタル的多様体

安定性理論 (今世紀に入って進んだ)

図形の形や、ランダムウォークの推移確率を多少変化させ (摂動を加え) ても

長い時間での熱伝導の仕方に大きな変化はない。

- Barlow-Bass '03, Barlow-Couhlon-熊谷 '05, Barlow-Bass-熊谷 '06, Andres-Barlow '15, Grigor'yan-Hu-Lau '15 など



ボンドの「重み」 μ_e を $C_1 \leq \mu_e \leq C_2$ なる範囲で変えても、

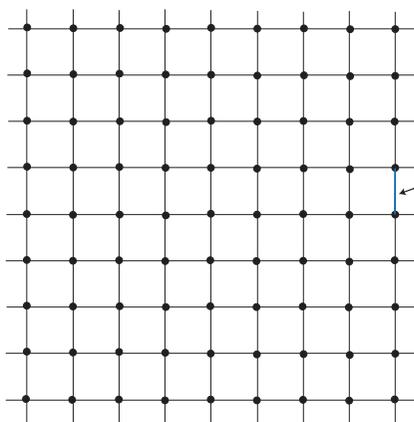
$$c_1 n^{-d} \exp\left(-c_2 \frac{|x-y|^2}{n}\right) \leq p_{2n}(x, y) \leq c_3 n^{-d} \exp\left(-c_4 \frac{|x-y|^2}{n}\right)$$

の評価は保たれる (c_1, \dots, c_4 は C_1, C_2 に応じて変わる)。

よって、再帰性・非再帰性も保たれる。

ランダムな媒質の上のランダムウォークと異常拡散

格子上的パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

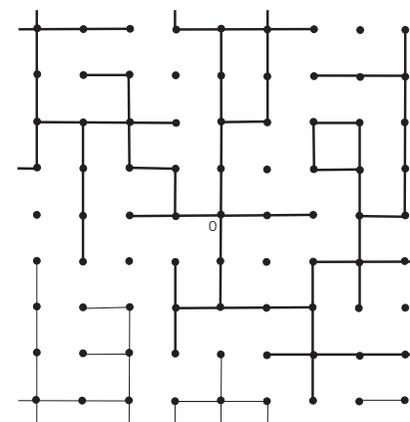


各ボンド
確率 p で「開く」確率
 $1-p$ で「閉じる」

「開く」か「閉じる」かは
ボンドごとに独立に決まる

ランダムな媒質の上のランダムウォークと異常拡散

格子上的パーコレーションクラスター上のランダムウォーク



相転移: \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) のとき、 $p_c \in (0, 1)$ (臨界確率) が存在して
 $p > p_c$ (優臨界確率) なら確率 1 で無限クラスターが唯一存在する。
 $p < p_c$ (劣臨界確率) なら確率 1 で無限クラスターは存在しない。

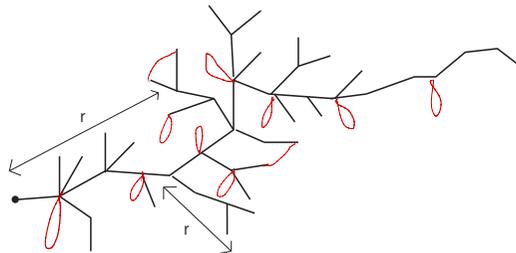
- 優臨界確率では、ランダムウォークの大域的な振舞いは正方格子のそれとあまり変わらない Barlow '04, Sidoravicius-Sznitman '04, Berger-Biskup '07, Mathieu-Piatnitski, '07

臨界確率ではどうか? $p_{2n}(0, 0)$: 0 から出発した粒子が $2n$ 秒後に 0 に戻る確率
 $d_s = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \log p_{2n}(0, 0) / \log n$: スペクトル次元 (つまり $p_{2n}(0, 0) \asymp n^{-d_s/2}$)
 アレキサンダー・オーバツハ予想 '82: $d \geq 2$ の時 $d_s = 4/3$ (d ではなく)

実は、少なくとも $d = 2$ と $d \geq 11$ では $p = p_c$ では無限クラスターは存在しない。
 そこで、無限クラスターが存在すると条件付けた場合の、無限クラスターを考える。
 (この上の物理現象は、元のクラスターの主要な現象を反映する)

アレキサンダー・オーバツハ予想の解決

- 樹木状パーコレーション Barlow-熊谷 '06
- 高次元有向パーコレーション Barlow-Járai-熊谷-Slade '08
- 高次元パーコレーション Kozma-Nachmias '09



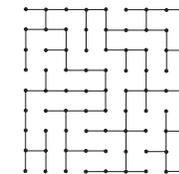
大事な関係式 (強い再帰性をもつ確率過程の場合)
 「図形の体積増大度 (ハウスドルフ次元): d 」と「有効抵抗増大度: ζ 」から
 スペクトル次元が決まる! (この場合 $d = 2, \zeta = 1$ なので、 $d_s = 4/3$)

$$d_s = \frac{2d}{d + \zeta}$$

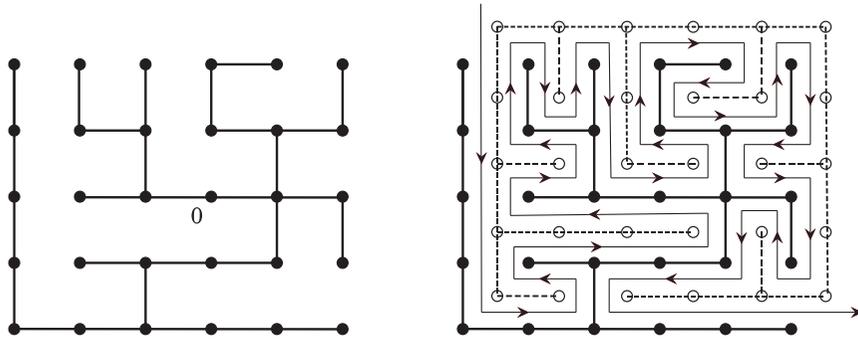
*アレキサンダー・オーバツハ予想は、低次元 ($d \leq 5$) では正しくないと考えられている。(未解決問題)

ランダムグラフ 二次元一様全域木 (UST)

$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{U}(\Lambda_n)$ を Λ_n 上の全域木 (全頂点を通り、連結、サイクルがない)
 — すべての全域木から一様ランダムに選ぶ



\mathcal{U} : UST on \mathbb{Z}^2 は $\mathcal{U}^{(n)}$ の極限 (確率 1 で \mathbb{Z}^2 上の全域木)

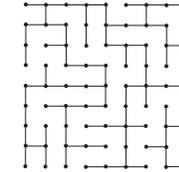


UST と UST ペアノ曲線

ランダムグラフ 二次元一様全域木 (UST)

$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{U}^{(n)}$ を Λ_n 上の全域木 (全頂点を通り、連結、サイクルがない)

— すべての全域木から一様ランダムに選ぶ



\mathcal{U} : UST on \mathbb{Z}^2 は $\mathcal{U}^{(n)}$ の極限 (確率 1 で \mathbb{Z}^2 上の全域木)

- **UST スケール極限:** [Schramm '00] 部分列スケール極限の位相的性質
[Lawler-Schramm-Werner '04] スケール極限の一意性
- SLE (Schramm-Loewner evolution) 統計力学に関する離散モデルのスケール極限になることが示された。(2つのフィールズ賞)

我々が考えているのは、このようなランダムな空間の上のランダムウォークのスケール極限とその性質である。(その結果、熱伝導などの物理現象がわかる。)

[Barlow-Croydon-K '17, Holden-Sun '18] $\{\varepsilon Y_{\varepsilon^{-13/4}t}^{\mathcal{U}}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^T\}_{t \geq 0}$.

定理. $\exists p_t^{\mathcal{U}}(\cdot, \cdot): B^{\mathcal{U}}$ の連続な熱核, $\exists T_0 > 0$ s.t. for \mathbb{P} -a.e. $\omega \in \Omega$,

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \leq c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1}) \exp \left\{ -c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left(\frac{d(x, y)}{t} \right)^{-1} \right\}$$

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \geq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1})^{-1} \exp \left\{ -c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left(\frac{d(x, y)}{t} \right) \right\}$$

for all $x, y \in \mathcal{U}, t \leq T_0$, ただし $\ell(x) := (1 \vee \log x)^\theta$, ($\exists \theta > 0$).

UST では $d_f = 8/5, d_w = d_f + 1 = 13/5$ 。

[Barlow-Croydon-K '21] Annealed (媒質について平均をとったもの) の熱核評価

応用の可能性 (例)

- ネットワークにウイルスが侵入した時の伝播の仕方を調べる。
(例: エルデシュ・レーニイのランダムグラフなどの複雑系ネットワーク)
- 不均質な媒質からなる土壤に汚染物質が染み込む速さを解析する。
(分数冪時間微分熱方程式による解析: 確率論のアプローチ)

基礎理論と応用の両面において更なる発展が期待できる。

ご清聴ありがとうございました。