

数学って何？

城西大学理学部

原岡 喜重

なぜ学校では数学を教えるのだろうか、とか、数学なんて何の役に立つのだろうか、と思ったことはありませんか。あるいは、世の中には数学者というのがいて、自分の好きな研究ばかりしているようだが、その存在意義はどこかにあるのだろうか、という疑問もあるかもしれません。そんな疑問を持ったときには、「数学ってそもそも何だろう？」と真正面から考えてみるのもよいでしょう。

「数学って何？」という問に対する答はすぐには手に入らないでしょうが（いつまでも得られないかもしれませんが）、この問を考えることで見えてくることは多いはずです。この「数学って何？」という問を考えるための材料を、古代ギリシアから現在までの人間の営みの中から選んで紹介したいと思います。数学は伶俐な論理体系を成していますが、その体系は多くの人々の情熱あふれる営みによって築かれたものです。その営みを通して、数学の姿を見てみたいと思います。¹

1 数学の始まり、古代ギリシア

数学のような長い歴史と膨大な蓄積のある学問分野について考えようというときには、その始まりのところ（まだ長い歴史もなく、そんなに蓄積もない）を見てみるのがよいでしょう。

数学はおよそ 4000 年前にはあったと考えられています。古代エジプトのパピルス（羊皮紙）には、食料の配分などのための計算方法や長方形の面積などが書かれているものがあります。また古代メソポタミア（BC 1900–1600）の粘土板には、ピタゴラス・トリプル（ $a^2 + b^2 = c^2$ となる自然数の三つ組み (a, b, c) のこと）がいくつも表になって記載されているのが見つかっています。4000 年近く前から、人類は数を知り、数を生活の中に活かす技術として数学を生み出し、使っていたことがわかります。

それからずっと時を経た古代ギリシアが、数学にとっては非常に重要です。古代ギリシアでは実に多くの思索家が現れ、世界を理解・記述することに生涯を捧げました。その中から 3 名を取り上げたいと思います。

はじめはピタゴラス（BC 582–496）です。ピタゴラスは、それまで実用の具であった数学を、思惟思索の対象にまで高めたと言われています。彼は数と図形の間に驚くべき関係が成り立つことを見つけ出しました。たとえばおはじきを並べて正三角形を作ってみましょう。

¹2025 年度年会における市民講演会（3 月 21 日）



このときに使うおはじきの個数を考えると、サイズ 1 の正三角形では 1 個、サイズ 2 にするためにはそれに 2 個追加し、サイズ 2 からサイズ 3 にするには 3 個追加し、という具合に、追加する個数が 1 ずつ増えていきます。

$$1 \qquad 1+2 \qquad 1+2+3 \qquad 1+2+3+4$$

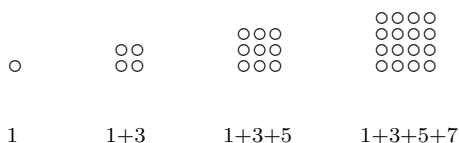
したがってサイズ n の正三角形では、 $1 + 2 + \dots + n$ 個のおはじきが使われることになります。正三角形という由緒ある図形と、数を 1 ずつ増やしながら足すという行為が対応しているわけです。ちなみにサイズ n の正三角形に使うおはじきの個数は、もう 1 つの正三角形をひっくり返してつなげることで、, $\frac{n(n+1)}{2}$ となることがわかります。こうして我々は公式

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

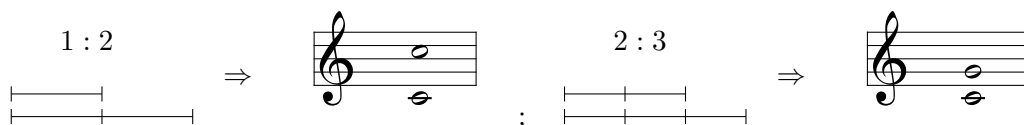
を得ました。同様のことをこれも由緒ある図形である正方形で行うと、今度は奇数を順に足すことになり、その総数を考えることで公式

$$(1) \qquad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

が得られます。



図形だけでなく、数と音との間にも驚くべき秩序があることにピタゴラスは気づきました。それは、長さの比が簡単な整数比になっている 2 弦の音は調和するという現象です。たとえば長さの比が $1:2$ であれば、2 弦の音はドとオクターブ上のドになりますし、 $2:3$ であればドとソになります。



このような事実から、ピタゴラスは数が森羅万象を決定していると考え（「万物は数である」）、世界を数で説明する思想体系を構築しようとしていました。ただしピタゴラスのいう数とは自然数のことで、有理数も自然数の比として表されるので数のうちですが、無理数は数とは考えませんでした。ところがある日彼は恐ろしい事実に気づきます。1 辺の長さが 1

というこれ以上ないくらい由緒ある図形である正方形の対角線の長さ（つまり $\sqrt{2}$ ）が、有理数ではないことを証明してしまったのです。この発見は彼の思想体系を崩壊させる危険な事実だったので、彼はこの事実を知らなかったことにして封印しました。

次に紹介するのはプラトン（BC 427–347）です。プラトンは、師のソクラテスがアテネ国家によって刑死させられたことに強い衝撃を受けました。国家をよりよくしようと生涯を捧げたソクラテスが、その国家によって殺された、そのような国家とはいったい何だろうか、どのように司られるべきであろうか。プラトンはこの考察を極め、『国家』という書物を著しました。その中でプラトンは、国家は善や正義を弁えている人が治めるべきであるとし、そのときの善や正義というのは、ある人にとっては正義だが他の人にとってはそうではない、というようなものでなく、いわば絶対的な善・正義であるとしました。そのような絶対的な〇〇というのを、イデアと名付けます。

イデアというのは彼の思想の中核をなす重要な概念で、彼は言葉を尽くして説明しています。たとえば『饗宴』においては「美のイデア」について次のような説明があります。美のイデアとは、

- ・表面上の「美」の奥にある、一種驚嘆すべき美
- ・一方から見れば美しく他方から見れば醜いというようなものでもなく
- ・時としては美しく時としては醜いということもなく
- ・ある者には美しく見え他の者には醜く見えるというものでもない
- ・顔とか手とか肉体に属するものとして顕れることもなく
- ・独立自存し永久に独特無二の姿を保てる美そのもの

というのです。〇〇でない、という説明が主で、そうではなく〇〇であると述べてほしいところですが、イデアはことばで定義することが不可能な概念だということがわかります。

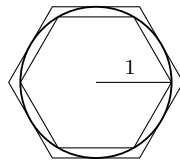
プラトンは、国家を治める人は善や正義のイデアを身につけていなければならない、そのためにはまずイデアを知らなければならないと考えました。イデアを知るとは、今自分はイデアを確かに感得した、という感覚を身につけることです。そのための最高の教材が数学である、とプラトンは考えました。というのは、数学の概念はすべてイデアだからです。数の1というのは、だれもが認識しているけれど、ことばで説明することはまずできない概念で、イデアなのです。数学を学んでいると、「あ、わかった」という感覚とともに、数学の概念を了解する瞬間があります。そのときその人はイデアを感得しているのです。

プラトンは国家を治める人の養成機関である学園アカデメイアを創設し、そこでの主要科目を1. 算術、2. 幾何学、3. 天文学としました。3番目の天文学は、星の運行を研究して農耕や軍事に役立てるための学問ではなく、星の運行という運動そのものを学ぶ学問としています。つまり現在のことばで言うと、解析学を指すものと考えられます。したがっ

て、代数・幾何・解析という数学の主要分野そのものがアカデメイアの主要科目だったので、このように数学を重視する姿勢は、古代ギリシアの正統な継承者を自認するフランスに現在でも引き継がれているようで、フランスでは数学の成績がよいことがエリートへの道であり、官僚や政治家には数学を身につけている人が多いそうです。

一方そのころ、アキレスと亀（足の速いアキレスがいつまで経っても足の遅い亀に追いつけない）とか、ゼノンの矢（弓から放たれた矢はいつまで経っても的に達しない）といった様々なパラドックスが思想界を困惑させていました。プラトンは、これらのパラドックスは「無限」が入り込んでいることによって引き起こされていると気づき（「いつまで経っても」というところに無限があります）、論理から厳密に無限を排除するようにしました。アカデメイアで教えられていた内容を体系化したと言われるユークリッド原論においては、取り尽くし法といった論法が用いられ、現代数学の ε - δ 論法が実質的に使われていました。この点からも古代ギリシアが現代数学の源となっていることがわかります。

最後はアルキメデス（BC 287-212）です。アルキメデスは、無理数のタブー（ピタゴラス）や無限のタブー（プラトン）を全く恐れることなく、逆に積極的に利用して全く新しい世界を切り拓きました。彼の円周率についての研究を見てみましょう。円周率 π は円の円周（の長さ）と直径の比の値で、その正確な値は知られていませんでした。アルキメデスは円に内接する正多角形と外接する正多角形を考え、それらの周長を求めることで円周率を上と下から挟む不等式を手に入れました。半径 1 の円を考えましょう。直径は 2 なので円周は 2π です。この円について内接正 6 角形と外接正 6 角形を作り、それぞれの周長を求めます。



内接正 6 角形の周長は 6、外接正 6 角形の周長は $4\sqrt{3}$ であることがわかりますから（外接の場合はピタゴラスの定理を使う）、この時点で不等式 $6 < 2\pi < 4\sqrt{3}$ が得られました。つまり $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ が得られたわけですが、ここで無理数 $\sqrt{3}$ が現れてしまいました。しかしアルキメデスは $\sqrt{3}$ に平然と迫っていきます。彼は、

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}, \quad a - \frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2-b} < a - \frac{b}{2a}$$

という不等式を使ったと考えられます。 $a = 2, b = 1$ として右側の不等式を使うと $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$ がまず得られます。このうち $5/3 < \sqrt{3}$ から、3 は $(5/3)^2 = 25/9$ より少し大きいことがわかるので、 $3 = \frac{27}{9} = \frac{5^2+2}{9}$ と見て $a = 5, b = 2$ として左側の不等式を使います。すると

$\frac{57}{11} < \sqrt{5^2 + 2} < \frac{26}{5}$ が得られ、各辺を 3 で割って $\frac{19}{11} < \sqrt{3} < \frac{26}{15}$ というより精密な評価が得られます。同様の操作を繰り返すと、いくらでも $\sqrt{3}$ に近い有理数が得られます。何回でも繰り返すことでいくらでも近い値を得る、というのは、無限を積極的に利用しているということです。このような考察を経て、アルキメデスは円周率についての不等式

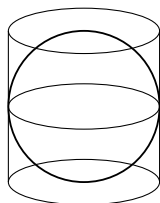
$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

を得ました。 $3 \frac{10}{71} = 3.140845\dots$, $3 \frac{1}{7} = 3.142857\dots$ ですから、これより π の小数第 2 位までが 3.14 であることが（歴史上初めて）わかりました。

アルキメデスはこのような数値の追求だけでなく、球に関する研究でもすばらしい結果を得ています。たとえば次のような結果です。

- 球の表面積は、その球の大円の面積の 4 倍である
- 球の体積は、球の大円に等しい底面を持ち球の半径に等しい高さを持つ円錐の体積の 4 倍である
- 球の体積は、球の大円を底面として直径を高さとする円柱の体積の $\frac{2}{3}$ 倍である

3 番目の結果は特にお気に入りだったようで、自分の墓にはこの絵を彫るように言い残したとされています。



最後に、これらの結果についてのアルキメデスのことばを紹介しましょう。

「これらの性質は、図形の本性としてはじめから備わっていたものなのですが、私より前に幾何学を研究した人々の誰にも知られず、それらの図形にそのような関係があらうとは誰も思ってもみないことでした。」

研究者なら一度は言ってみたい台詞ですね（一度でもこのようなことが言えたら本望です）。

2 ガリレオ、ニュートン

古代ギリシアからずいぶん飛びますが、次はガリレオ（1564–1642）の成し遂げたことを見てみましょう。ガリレオは振り子の等時性を発見したり、自作の天体望遠鏡で木星の衛

星や土星の輪を発見したり、地動説を唱えたり、ものすごく多くのことをやりましたが、明示的には述べていないけれど、彼は万物の運動を支配する法則を見つけようとしていたように思われます。

その当時の学者というのは、アリストテレスの著した書物に通じ、そこに書いてあることを解釈して自然を説明するのを仕事とする人々でした。しかしガリレオは、自然のことを知りたければアリストテレスではなく自然を見なければならない、と考えました。そんなの当たり前だろう、と思うところですが、ガリレオの時代においてはこのような態度は全く異端的なものでした。ガリレオは地動説を唱えたことでカトリック教会からも異端の疑いをかけられましたから、当時の2つの大きな権威と戦ったことになります。

万物が同じ法則に従うのなら、天空の星も目の前のボールも同じ法則に従うでしょう。ならば身近なボールの運動を調べればよいだろう、ということで、彼は自由落下の実験を行います。手を離すものは落下しますが、その落ち方はだんだん速くなります。このだんだん速くなるなり方を定量的に求めることができれば、その速くなり方を引き起こす法則が見つかるだろう、とガリレオは考えました。まっすぐ落下させると速すぎて調べづらいので、彼は斜面にボールを転がす実験をしました。そのときの器具が再現されて、フィレンツェのガリレオ博物館に展示されています。



出典：https://catalogue.museogalileo.it/gallery/InclinedPlane_n01.html

実験の結果、ガリレオは、落下し始めてから1単位時間（たとえば1秒間）に進む距離、次の1単位時間に進む距離、その次の1単位時間に進む距離、... というのが、1, 3, 5, ... という具合に長くなっていくことを発見しました。これを「1, 3, 5, ... の法則」と呼びましょう。この結果をピタゴラスの公式(1)と組み合わせると、「自由落下においては距離は時間の2乗に比例する」ということができます。そしてさらに考察を重ねた結果、ガリ

レオは「自由落下においては速度は時間に比例する」という法則を見つけました。これは歴史に銘記されるべき画期的な発見です。ガリレオのことばを紹介しましょう。

「これらのことはすべて僕らの友人（ガリレオのこと）によって見出され証明されたのです。僕たちはこれらすべてを非常に喜びまた驚きながら知り、また研究もしてみました。というのはそれを巡って何百巻という書物が書かれた主題（落下運動）について、全く新しい知識を呼び起こされたからです。この友人の書物のうちに述べられた数限りない驚くべき結論のどれ一つをとってみても、僕らの友人以前にはだれ一人としてそれを観察し理解したものはないのです。」

先に紹介したアルキメデスのことばに通じる、喜びと誇りに満ちた言明ですね。

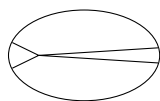
ガリレオは自身の発見した自由落下の法則を用いて、たとえば大砲の弾をちょうど敵陣に命中させるにはどうすればよいか、というようなことを計算によって導き出しました。これは画期的なことです。それまで人類は、身体感覚と帰納（それまでの経験）によって行動を決めてきました。大砲の弾を撃つときも、外れたなら、これくらいかなと思う程度に少し修正して撃ち、また外れたらもう少し修正する、というやり方でした。ところがガリレオは弾の従う法則を知っていて、その法則が数式（方程式）で表現されているので、その方程式を解くことで弾を撃つ前に弾がどのような軌道を描きどこに落ちるのかを知ることができたのです。身体感覚や帰納ではなく、法則と演繹によって未来がわかるのです。

ガリレオは、「自然という書物は、数学の言葉で書かれている」ということばを残しています。自然界の法則は数式で表されており、その法則を数学的に扱うことで自然現象がわかり、現象が起こる前にどうなるかを知ることができる、ということで、これをガリレオの自然哲学と言います。ガリレオの自然哲学は我々の科学文明の礎であり、色褪せることなく現在でも主導原理として働いています。

このように人類の歴史を画する働きをしたガリレオですが、実は彼は万物の運動を支配する法則を発見することはできませんでした。それを発見したのがニュートン（1642–1727）です。なぜガリレオは発見できずニュートンができたのか、ガリレオになくてニュートンにあったものは何でしょうか。

ガリレオの自由落下の法則は速度について述べていますが、「1,3,5,...の法則」にあるように、ガリレオは速度が変化するというを一定時間に進む距離が変化するという形で言い表しています。ガリレオの同時代人のケプラーは、惑星の運行に関する3法則を発見し、これも近代科学の幕を開けたすばらしい結果です。第一法則は、惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描いて運行するというもので、第二法則は面積速度一定の法則と呼ばれます。これは惑星が楕円軌道上太陽に近いところにあるときには速く運行し、遠いところにあるときには遅く運行するというを定量的に記述した法則で、一定時間が経過したときに惑星と太陽を結ぶ線分が掃く楕円の中の扇型の面積が一定になる、という形

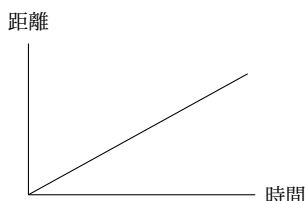
で述べられています。イメージとしては



のようになります。ケプラーも、

速度の変化を一定時間に進む距離の変化として表したのです。

速度とはいったい何だったのでしょうか。等速運動の場合、 $(\text{速度}) \times (\text{時間}) = (\text{距離})$ によって速度が定義されます。すなわち進む距離が時間に比例するので、その比例定数を速度と定めます。



これは小学校で学ぶことで、小学生が理解できます。それでは等速ではない運動のときの各瞬間の速度とは何でしょうか。等速運動のときは

$$(\text{速度}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$

でしたから、1つの案として

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ までに進んだ距離}}{t \text{ までに経過した時間}}$$

という定義が考えられますが、これは t までの間に速かったり遅かったりした影響が分子の距離に反映するので、 t という瞬間の速度としては不適格です。それでは t という瞬間以外の影響を排除するため、

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ という瞬間に進んだ距離}}{t \text{ という瞬間に経過した時間}}$$

としてはどうでしょうか。この定義には致命的な欠陥があります。瞬間というのは時間の経過がないということですから、右辺の分母が0になってしまいます。また時間の経過がないので進む距離も0となり、この値は0/0という不定なものになります：

$$\text{時刻 } t \text{ における速度} = \frac{t \text{ という瞬間に進んだ距離}}{t \text{ という瞬間に経過した時間}} = \frac{0}{0}$$

ガリレオの時代までは、ここで困って先に進めませんでした。

ニュートンは革命的なアイデアでこの困難を乗り越えました。そのアイデアは次の式で表されます。

$$\text{時刻 } t \text{ における速度の近似値} = \frac{t \text{ から } t+h \text{ までの間に進んだ距離}}{h}$$

まず右辺の分母は h ですから 0 と異なり、値が確定します。そしてこの値は、 h を 0 に近づけると近似の精度が上がっていくと考えられます。そこで $h \rightarrow 0$ としたときこの値がある値 v に近づいていく場合は、 v をもって t という瞬間における速度と定義します。

この定義の勝因は、 t という瞬間における速度を直接求めようとはせず、近似値を経由して間接的に求めるという高度な戦略にあります。小さい子供はほしいものに直接手を伸ばしますが、大人はほしいものがあってもほしくない振りをしたり、他のものがほしいように振る舞ったりしますよね。ニュートンはいわば大人の発想で速度をつかまえたのです。

このように距離の変化（時間を変数とする関数としての距離）から速度を導く操作を微分といいます。距離を表す関数を $x(t)$ とすると、速度はその微分

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

で与えられることになります。この微分という操作は距離を表す関数に限定して定義されるものではなく、一般に変化する量の変化の大きさそのものを定量的に表す手段であり、それを我々は手に入れたことになります。特に速度の変化の大きさを表す加速度が、速度を微分したものとして定義されました。そしてニュートンが発見した万物の運動を支配する法則（ニュートンの運動法則）は、

$$(\text{質量}) \times (\text{加速度}) = (\text{外力})$$

というこれ以上ないくらい簡潔な式で表現されます。この法則を見ると、距離を 2 回微分した加速度が現れているので、微分を持たなかったガリレオには見つけるのは難しかったと考えられます。ガリレオになくてニュートンにあったのは微分です。

微分の発見は世界に大きな変化を与えました。私は人類の歴史上最大の変化をもたらした発見ではないかと思います。微分の発見以前と以後でどのように世界は変わったでしょうか。

何よりニュートンの運動法則が発見され、ガリレオの自然哲学が本格的に実践されるようになりました。物事が起こる前にどうなるかがわかる、という世界が実現されることになったのです。人類の行動原理が、帰納から演繹へと切り替わっていきました。

ピタゴラスが神秘と感じた、長さの比が簡単な整数比である 2 弦の音は調和するという現象は、ニュートンの運動法則から導かれる波動方程式の解の性質として説明されるようになりました。ケプラーの惑星の運行に関する 3 法則も、ガリレオの自由落下の法則も、すべてニュートンの運動法則から導かれます。さらに流体の運動についての法則も導かれました。現代の科学・技術社会がここから始まったのです。

もう 1 つの大きな変化は、微分が積分と結びついたことです。面積や体積を求める操作であった積分は、微分の逆演算を通して計算に乗るようになりました。その結果、2000 年

の間ただ一人、天才アルキメデスにのみ可能であった面積・体積の計算を、世界中の高校生ができるようになったのです。

3 オイラー

オイラー（1707–1783）は整数論・トポロジー・剛体力学・流体力学をはじめ、実に多くの分野で画期的な仕事を成し遂げ、多くの数学者が理想の数学者と考える存在です。まず彼のことばを一つ紹介しましょう。アルキメデスやガリレオのことばと通じる趣が感じられるかと思います。

「自然数のべきを持った級数は、今日それについて何か新しいことが発見されうるとはほとんど思えないほどに熟考され研究されてきた。実際、級数の和について考えた人は誰であれほとんど全員、この種の級数の和も求めようとしてきた。しかしその和をうまく具合に一つの方法で表現することができなかった。（中略）さて最近私は、全く思いがけず、

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

という級数の巧みな表現に到達した。…」

この級数の和は $\pi^2/6$ となります。オイラーの得た結果は、後にリーマンが定義したゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を用いると $\zeta(2) = \pi^2/6$ と表されますが、オイラーは2だけでなく正の偶数における $\zeta(s)$ の値をベルヌーイ数と π を用いて明示的に表したことを皮切りに、ゼータ関数や素数に関するめざましい現象を次々と発見し、それらは現代の整数論の豊かな源泉となっています。

数あるオイラーの仕事の中から、ここでは凸多面体についての結果を紹介しましょう。オイラーは、凸多面体においては

$$\chi = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

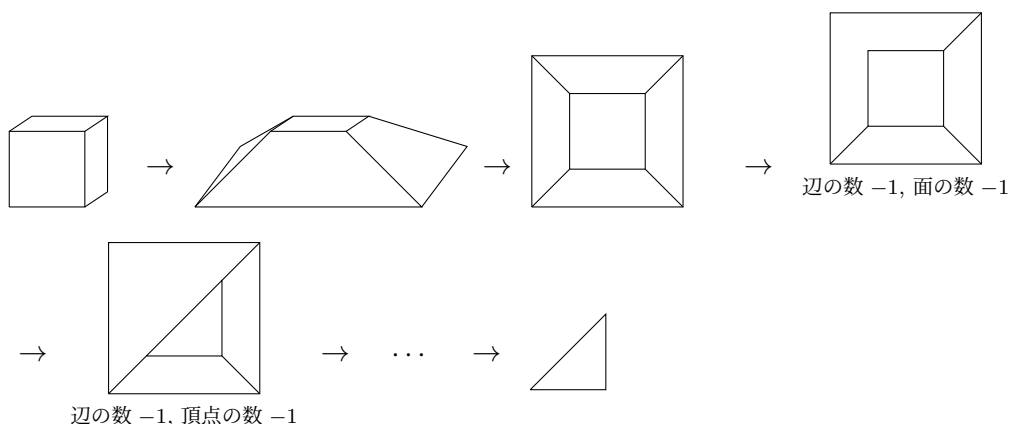
が一定である（どのような凸多面体でも同じ数となる）ということを見つけ出しました。その値は2です。この数のことを現代ではオイラー標数と呼びます。この値が2となることを証明します。

1つの凸多面体、ここでは例として立方体を持ってきます。それを床に置いて、底の面を大きく広げます。こうしても χ は変化しません。この立体を上から見ると、底の面以外のすべての頂点・辺・面が見えています。これを平面図形と見なし、辺を1本取り去ってみます。すると辺の数は1減りますが、同時に面の数も1減るので、 χ の値は変わりません。

尖ったところのできたので2本の辺をまっすぐな辺に取り替えます。このとき辺の数は1減りますが、頂点の数も1減って、やはり χ の値は変わりません。この操作を繰り返していくと、最後には三角形が得られます。三角形については頂点3個、辺3本で、面は1枚のように見えますが底面が残っているので面の数は2となり、

$$\chi = 3 - 3 + 2 = 2$$

となることがわかりました。

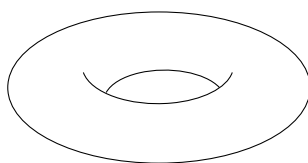


ここで考えた多面体は必ずしも凸である必要はなく、少しへこんだところがあっても構いません。しかし穴が空いてはいけません。つまり連続的に球面に変形できるような多面体であればいいのです。すると今得られた結果は、「球面のオイラー標数は2である」と言い表すことができるでしょう。

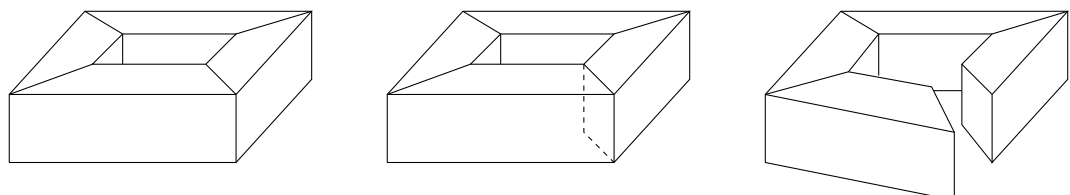
「球面のオイラー標数が2？ 球面には面が1つで辺も頂点もないではないか！」と不審に思われる方もあるかと思います。ここにアイデアがあります。

つまりこの場合、「球面＝アイデア」であって、このアイデアから情報を引き出すには、球を粘土でできていると思って好きな多面体に整形し、頂点の数、辺の数、面の数を数えればよいのです。人によって球から作る多面体は違いが出るでしょうが、誰が作ったどんな多角形でも $\chi = 2$ となるので、この値は1個1個の多面体が備えている性質なのではなく、球面が備えている性質である、と考えるわけです。

同じように考えると穴が1つ空いたトーラスのオイラー標数も考えることができます。



この場合もトーラスはアイデアで、オイラー標数を求めるためには多角形に整形する必要があります。多角形に整形した後、1つの平面で切り離すと、球面を整形した多面体になります。



この多面体のオイラー標数は2でした。元の多面体に戻すためには、切り口の合同な多角形を貼り合わせる必要があります。貼り合わせることで多角形の辺と頂点は重なって個数が半減しますが、辺の個数と頂点の個数は等しいため χ の値には影響しません。一方、面は2枚が貼り合わされて消滅するので、全体の面の個数は2個減ります。したがって貼り合わせたあとの（すなわちトーラスの）オイラー標数は $2 - 2 = 0$ となります。

球面やトーラスのオイラー標数の求め方は、数学におけるアイデアの扱い方の1つの方法を示唆しています。（数学はアイデアを学ぶ手段としてプラトンに確固たる地位を与えられましたが、その地位に甘んじてはいなかったのです。）その方法とは同値類の考え方です。

同値類の考え方に基づいて世界を把握する方法を図式化すると、次のようになるでしょう。

本当のもの（アイデア – 目に見えない） 「見える化」する 見えるようになったものを扱う 結果が見える化の仕方に依るか？ 依る → 本当のものについての結果ではない 依らない → 本当のものを扱えた	同値類 同値類の代表元を1つ選び出す 代表元に操作を施す well-defined?
---	--

たとえば我々はニュースを見て世界情勢を把握しますが、そのニュースは取材者が得た情報を編集者が整形したもので、そこには「見える化」という操作が施されています。たとえ自分が取材者であったとしても、神の視座を持たない限り現場で何が起きているのかをくまなく把握することは不可能でしょう。そのような不十分な情報を元に作られたニュースは、どれほど真実を表しているかわかりません。数学的に世界を把握するとするとしたら、ニュースは本当の真実（アイデア）を誰かが見える化した結果に過ぎない、ということをもまず頭に置いて、その奥にあるアイデアの方を認識しようと心懸けます。複数のニュースを見比べて、それぞれの語り方に依らない何かがあれば、そこにそのニュースのアイデア（真実）があるかもしれません。見えているものは「見える化」の結果ととらえ、その奥にある本当のものを意識することが大事なのです。このような物事の認識・把握の仕方が身につ

けられるというのが、おそらくプラトンが目指したことでしょうし、私は数学を学ぶことの最も大きな意義ではないかと考えます。

4 ゲルファント

ここまで昔の人を紹介してきましたので、最後に現代数学の巨人の一人を紹介しましょう。ゲルファント（1913-2009）です。彼は、表現論・関数解析をはじめ、数論から確率論、さらには生物学にまで及ぶ広大な研究分野に取り組み、多くの分野で時代を画する仕事を成し遂げました。その膨大な仕事の中から、晩年に精力的に取り組んだ超幾何関数についての研究を見てみましょう。

超幾何関数というのは、ベキ級数

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

で定義される関数です。ここで $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ です。この関数は指数関数や三角関数より一段階超越性の高い関数ですが、大域的な挙動が明示的にわかり、オイラーやガウスも研究した興味深い対象です。特殊関数として数理論理にもよく現れるということもあり、微分方程式、複素解析や物理数学の教科書にもよく登場し、まさに「それを巡って何百巻という書物が書かれた」存在です。

超幾何関数は、ベキ級数だけでなく積分によっても表されます。

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt.$$

ある日ゲルファントは、「超幾何関数はグラスマン多様体に住んでいるべきだ!」と言ったそうです。積分表示には積分変数 t の 1 次式が 3 本現れますが、射影化して無限遠も考えると 4 本の 1 次式があると思えます。1 次式の係数は 2 個あるので、それらの係数を並べると 2×4 行列が得られ、この行列がグラスマン多様体の点と見なせるということです。つまり超幾何関数は、もともと $2 \times 4 = 8$ 変数の関数だったのを 1 変数に制限したものととらえられ、8 変数関数と見ることで群が作用する様子がきれいに見えて、幾何学的な把握が容易になるのです。超幾何関数を一般の (k, n) 型グラスマン多様体にまで拡張するのも容易で、さらに合流型の超幾何関数も自然に定義されることになります。

その後ゲルファントは、ベキ級数の方についても驚くべき見方を示しました。ベキ級数の係数に現れる $(a)_n$ はガンマ関数を用いて表すことができ、さらにガンマ関数の反転公式を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n = \frac{\Gamma(c) \pi^2}{\Gamma(a) \Gamma(b) \sin \pi a \sin \pi b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^n}{\Gamma(1-a-n) \Gamma(1-b-n) \Gamma(c+n) \Gamma(1+n)}$$

と書き換えることができます。そこで一般にガンマ関数を分母に配置した形のベキ級数を超幾何関数と考え、その配置の仕方を整数行列 A で表します。すると行列 A が規定する幾何学的構造が、級数の性質、積分表示の具体形、特異点集合の形状などすべてを支配することがわかり、非常に大きなクラスの関数がこのやり方で統一的に扱えることが示されました。この拡張された超幾何関数を、ゲルファントは A 超幾何関数と呼んでいますが、GKZ 超幾何関数という呼び方の方が定着しているかもしれません。GKZ 超幾何関数は、hyperdeterminant（超行列式）の理論を生み出し、保型関数論でも活躍し、ミラー対称性の理論では B サイドの主要メンバーとしての役割を果たしています。

GKZ はゲルファント・カプラノフ・ゼレヴィンスキーという創作者の頭文字を連ねたものですが、その一人であるゼレヴィンスキーはゲルファントについて次のように語っています（ゼレヴィンスキーはゲルファントの孫弟子に当たり、また共同研究者でした）。

私は彼のように「big picture」を描き、不要な技術的詳細にとらわれず常に核心に到達する数学者を見たことがない。彼は「正しい」問を立て、異なる数学の領域の間に思いもよらない関係を見つけ出す、尋常ではない能力を備えていた。

これはゲルファントが亡くなったあとに、アメリカ数学会の雑誌に掲載された追悼記事からの引用です、ゼレヴィンスキーは同じ記事の中で、ゲルファントが好んで話していたというたとえ話を紹介しています。それをお伝えしてこの記事を終えましょう。

ある年老いた配管工が、ヒーターの修繕に来た。彼はヒーターの周りを歩き回り、しばし考え、そしてヒーターをハンマーで一度たたいた。ヒーターはたちまち動き始めた。配管工は 200 ルーブルを請求した。持ち主が「でもおまえはちょうど 2 分だけいてほかに何もしてないじゃないか」と言うと、配管工は次のように答えた。「3 ルーブルがヒーターをたたいた分で、残りはどこをたたけばよいかを知っていることに対する分だ。そのことを知るために私は 40 年学んだのだ！」

参考文献

- [1] 吉田洋一『零の発見』岩波新書, 1979.
- [2] プラトン（久保勉訳）『饗宴』岩波文庫, 1952.
- [3] プラトン（藤沢令夫訳）『国家（上・下）』岩波文庫, 1979.
- [4] 上垣涉『アルキメデスを読む』日本評論社, 1999.
- [5] 朝永振一郎『物理学とは何だろうか 上』岩波新書, 1979.

- [6] S. G. ギンディキン 『ガリレイの 17 世紀』 シュプリンガー・フェアラー東京, 1996.
- [7] オイラー 「逆級数の和について」 (馬場郁訳) 数学セミナー 1988 年 10 月号.
- [8] 原岡喜重 『超幾何関数』 朝倉書店, 2002.
- [9] V. Retakh (Ed.), Israel Moiseevich Gelfand, Part I, Notices of AMS, **60** No.1 (2013), 24-49.