

坪内俊太郎氏の第 41 回（2024 年度）井上研究奨励賞受賞によせて

東京大学大学院数理科学研究科特任教授

儀我 美一

坪内俊太郎氏と最初に出会ったのは、同氏が 4 年のセミナーで私の研究室を選んだときかと思います。この年の 4 年のセミナーでは、Q. Han 氏と F. Lin 氏による Elliptic Partial Differential Equations（2011 年版）をテキストとして挙げていました。この本は、薄いですが、ラプラス方程式とそのさまざまな一般化である楕円型方程式についてその基礎理論、特に解の正則性の理論が要領よくまとめられています。この年の 4 年セミナーですが、3 年後に私が定年になるということもあり、当研究室を選んだ学生は彼ただ一人でした。一人で毎週セミナーで発表することは、容易ではありません。それにもかかわらず坪内俊太郎氏が、この本の内容について、まちがい等の訂正はもちろん、関連する文献を調査かつ紹介するなど、毎週すばらしい発表をされたことが印象に残っています。

坪内俊太郎氏がこのたび受賞された井上研究奨励賞は、すぐれた博士論文の執筆者に授与されるものです。物理系や生物系が主で数学系の受賞者は全体の数パーセントしかいません。（もっと数学系で推薦する数を増やす必要があると思います。）坪内俊太郎氏は、その数百ページにおよぶ博士論文「摂動特異楕円型および放物型方程式に対する正則性理論」で、この賞を受賞されました。この中で、同氏は、楕円型・放物型偏微分方程式の基本的課題である解の正則性理論の分野で、新しい理論を構築することにより、重要な未解決問題をいくつも解決されました。例えば非ニュートン流体の一つであるビンガム流体（ケチャップや塗料等、ある程度力を加えないと流動しない流体）の一方向定常流の速度勾配が連続であることを示しています。これは 1970 年代からの未解決問題でした。

解の正則性理論は 18 世紀後半から研究されている歴史のある分野です。その背景について簡単に説明いたします。自然現象、社会現象の平衡状態は、しばしばあるエネルギーの最小解として表現されます。例えば液滴や結晶の形状は、表面積などの表面エネルギーを（体積一定のもとで）最小にする形として説明されます。しかし、一般にエネルギーについて、それを最小にする解の存在を厳密に説明することは容易ではありません。そのため不連続性を許す関数まで関数概念を拡張して存在を示すことになります。解を見つける範囲を広げるのですから存在証明は容易になりますが、そこで得られる解は滑らかさがわからないため、広義解または弱解と呼ばれます。広義解が実際に微分可能かどうかなどは別途示す必要があります。広義解が実際にどの程度の微分可能性を持つかの理論を正則性理論といいます。18 世紀後半から、さまざまなエネルギーに対してそれを最小にする解の正則性が研究されています。例えばディリクレエネルギーの最小（広義）解は、解の正則性理論より滑らかになりラプラス方程式の解となることは、古典的な結果です。最小解の満たす

方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）が線形楕円型の場合、データの滑らかさに対応した解の正則性（最大正則性）が得られますが、非線形となると、データが滑らかでも解は滑らかとは限りません。

坪内俊太郎氏が扱ったエネルギーの典型的な形はディリクレエネルギーと全変動エネルギーの和です。このエネルギーは、ビンガム流体だけでなく、結晶表面の形状の問題にも関係しています。このようなエネルギーについて最小広義解が実際に連続微分可能になっていることを示したところが、同氏の博士論文の画期的な点の一つです。

最小解はもちろん臨界点ですので、エネルギーの微分（変分）はゼロになります。したがって任意の方向微分もゼロになります。適切な方向への微分を考え、元の最小解についてさまざまな評価を作っていくことがポイントになりますが、考える方向は無数個ありますので、どの方向を選ぶのかにはセンスを問われます。また、この計算を正当化する必要があります。そのためには特異なエネルギーである全変動エネルギーを滑らかなエネルギーで近似する必要があります。そこで得られる各種の評価が、近似の度合いによらず一様になっていることを示す必要があります。そのため多量の不等式計算が必要となり記述も長くなります。

解の正則性問題は他の多くの変分問題で研究され、国際的には、A. Figalli が 2018 年にフィールズ賞を受賞するなど注目されていますが、日本ではこの分野の研究者がほとんどおりません。坪内俊太郎氏がほぼ独学でこのような伝統ある分野で、未解決問題を解決されたことは驚きです。博士論文では、さらに非定常問題についても扱っています。これにより、一方向非定常ビンガム流についても解の空間微分が連続であることがわかります。坪内俊太郎氏の扱った問題は、楕円性が非一様という特徴がありますが従来扱われていた退化問題とは異なる非一様性で先行研究はまったくありませんでした。そのような中、このようにすばらしい結果を得られたことに、感服いたします。

もちろん博士論文の内容のほとんどは一流国際学術雑誌に出版済です。また、博士論文の一部については、日本数学会より 2023 年秋に建部賢弘奨励賞を受賞されています。

坪内俊太郎氏が 4 年、修士課程在学時、私は両親の世話等で忙しく、ほとんどともに「指導」できませんでした。また、修士 2 年目から博士課程在籍中はコロナ禍で対面での実質指導はできませんでした。このような状況の中、私が行ったことは、投稿論文の査読の依頼でした。通常は査読は査読だけで終わるのですが坪内俊太郎氏は、査読論文から、ご自身への問題解決のためのヒントを見出すのがたいへん上手でした。査読によりどんどんご自身の研究が進むという稀有な研究者であると思います。一見、おとなしいかたのように見えますが、中学、高校では学級委員長を務めるなど頼りになる存在です。高校では皆勤賞を受けるなど大変健康な方です。現在、さまざまな研究機関から招聘を受けている坪内俊太郎氏ですが、今後正則性理論の研究者としてさらに世界を牽引していくことを期待しております。