授賞報告
2025年度日本数学会代数学賞

2025年度日本数学会代数学賞は，阿部紀行氏（東京大学大学院数理科学研究科），田中公氏（東京大学大学院数理科学研究科）に授賞されました．

阿部紀行氏「代数群の表現論の研究」

連結代数群と言ってしまうと定義により連結代数多様体かつ群ですので無数にあります．ただ，そこで代数群の表現論ということまで考えるとそれが難しい部分は連結簡約群と呼ばれる離散的データ (ルート・データ) で定まる代数群と体から定まる算術的なデータで統制されることが古くから知られています．また連結簡約代数群の表現論の記述にはルート・データから定義される代数であるいわゆる岩堀ヘッケ環がさまざまな形で自然に出現し，ルート・データを固定して体を取り替えて得られる代数群たちの表現論の構造の間に類似や関係をもたらしています．従って代数群の表現論を発展させるといった場合，岩堀ヘッケ環を用いた代数群の表現論の記述を応用を見据えつつ既存の場合を超える状況において進めてゆくことは基本的な戦略となります．

阿部紀行氏はこのような代数群の表現論の発展において顕著な貢献をしています．ここではその中で特に大きなものふたつについて簡単に説明します．

p 進代数群は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大上の簡約代数群で，$\mathbb{Q}_p$ の位相から誘導される位相を持つ位相群です．この群の認容表現と呼ばれるクラスの表現はいわゆる保型表現を含み，特に局所 Langlands 対応の片側に位置するため数論的な興味から深く研究されてきました．その後，2000年代に正標数版の Langlands 対応が模索されるなかでその対応の片側として p 進代数群の法 p 認容表現 (標数 p の有限体の閉包上の認容表現) が注目されました．このような中で阿部氏は分裂型 p 進簡約代数群の法 p 既約認容表現を超尖点表現を除いて分類しました．さらにこの手法を発展させ，Henniert, Herzig, Vignéras との共同研究において一般の p 進簡約代数群に対して法 p 既約認容表現を超尖点表現を除いて分類することに成功しました．これは p 進代数群の法 p 表現の理論におけるひとつの到達点と言えます．この分類は通常表現 (つまり複素数体上の表現) の場合と同様に適切に定義された岩堀ヘッケ環の表現論の言葉に置き換えられますが，阿部氏はそれに対するより詳細な研究を継続していて，標準的な岩堀ヘッケ環の理論のこの場合における対応物のかなりの程度は同氏の結果となっています．

複素数体上の簡約リー代数の最高ウェイト表現の指標は Kazhdan–Lusztig 基底と呼ばれる岩堀ヘッケ環の元により記述されます (特に岩堀ヘッケ環は出現しますがその出現のしかたは上とは異なります). このことは 1981 年に幾何学を用いて証明されましたが現在でも「Kazhdan–Lusztig 予想」として簡約リー代数の表現論のひとつのハイライトとして語られ続けています. Kazhdan–Lusztig 予想の純代数的証明はその解決後も問題として残り, 最終的に Soergel 双加群の理論を用いて Elias–Williamson により 2014 年に一般化された形で解決されました. ここで彼らの結果の特別な場合から任意標数の代数群の (定義体上の) 既約表現の指標が記述できる可能性があることが幾何学的佐武対応および Juteau–Mautner–Williamson による parity sheaf の理論から分かります. 正標数の代数群の既約表現の指標は長い間いわゆる Lusztig 予想により概ね制御されていると信じられていましたが, 2010 年代に反例が見出されるなどいまもって十分とは言えません. そのこともあり, この可能性には大きな関心が寄せられました. ただし, この可能性を実現するにはまず Soergel 双加群の理論において標数の制限を取り去る必要がありました. この状況において阿部氏は任意標数の Soergel 双加群を適切に定義し, さらにそれを簡約代数群の表現論へと応用しました. この阿部氏のバージョンの Soergel 双加群は Abe–Soergel 双加群などとも呼ばれ, 任意標数の簡約群の指標公式などへ向けての基本的道具として多くの研究に取り入れられ始めています.

以上に見ましたように阿部紀行氏の代数群の表現論に関する研究には表現論分野において今後さらなる発展が見込まれる重要なトピックの基礎的な部分に対する本質的な貢献が複数含まれています. したがってこれらを含む阿部氏の研究業績は極めて重要なものであり, 特に代数学賞を受賞するのにふさわしいものです.

田中公氏「正標数の代数多様体の研究」

田中公氏は正標数の代数幾何学, とりわけ極小モデル理論について精力的に研究を行ってきた. 分数式の形の変数変換（双有理変換）により写り合う代数多様体を本質的に同一視する立場が双有理幾何学であり, その究極的な目標は代数多様体の分類にある. 極小モデルプログラム（Minimal Model Program, 以下 MMP と略す）は, 与えられた代数多様体に対し基本的な双有理変換を繰り返すことで, より調べやすい代数多様体である極小モデルまたは森ファイバー空間を出力するプログラムであり, 極小モデル理論において中心的な役割を果たす. 標数 0 では森重文氏が 3 次元の MMP を完成させ, さらに Birkar・Cascini・Hacon・M$^{\mathrm{C}}$Kernan は少し制限した形の MMP（スケール付き MMP）が一般次元でも多

くの重要な場合に成立することを証明した．標数 0 の極小モデル理論では小平型のコホモロジーの消滅定理を活用するが，このような消滅定理は正標数では 2 次元の場合ですら成り立たない．そのため，正標数の極小モデル理論は比較的最近までほとんど何もわかっていなかった．

田中氏の初期の業績として，2 次元の極小モデル理論への貢献があげられる．田中氏は大学院生のときに，正標数の代数閉体上定義された代数曲面（2 次元代数多様体）に対し，MMP が成立すること，さらには固定点自由化定理などの極小モデル理論の基本定理が成り立つことを証明した．藤田の消滅定理（Serre の消滅定理の一般化）とフロベニウス写像を組み合わせることで小平の消滅定理の弱形を証明し，これを極小モデル理論に応用するというのが田中氏の基本的なアイデアであった．この成果を皮切りに，田中氏は 2 次元の極小モデル理論において次々と成果を挙げ，最終的には 2 次元優秀スキーム上で極小モデル理論が成立することを証明した．これは正標数のみならず混標数の場合も含む 2 次元の極小モデル理論の決定版といえるものであり，今後も長く引用され続ける業績となるだろう．

標数 7 以上の代数閉体上定義された 3 次元代数多様体に対するスケール付き MMP は，Hacon, Xu, Birkar, Waldron 等によって証明された．權業善範氏，中村勇哉氏との共同研究において田中氏は，この結果を基礎体が完全体の場合に拡張し，標数 7 以上の有限体上定義された，高々対数端末特異点しか持たない 3 次元 Fano 多様体は有理点を持つことを証明した．特異点を持たない場合は Esnault によって任意次元で証明されていたが，高次元で特異点を持つ場合の初めての結果である．証明の鍵となる命題として，田中氏らは標数 7 以上の 3 次元端末特異点が WO 有理特異点であることを示した．WO 有理特異点は Chatzistamatiou・Rulling により導入された正標数の特異点であり，特異点解消の Witt 層の高次順像が消滅するという条件で定義されるが，このような Witt 層の性質と双有理幾何学を結びつけたこの論文のインパクトは大きい．さらに論文 “Vanishing theorems of Kodaira type for Witt canonical sheaves” で田中氏は，正標数の非特異射影多様体において，豊富な可逆層のタイヒミュラー持ち上げと Witt 標準層のテンソル積の高次コホモロジーが消滅することを証明した．これは従来の小平の消滅定理の Witt 版とみなせる．上述のように小平の消滅定理は正標数では成り立たないにも関わらず，このような Witt 版が成立するというのは驚くべきことであり，代数幾何のみならず数論幾何においても注目を浴びた．

より双有理幾何学的な話題についても田中氏は数多くの重要な貢献をしている．例えば，極小モデル理論では証明の際にしばしば次元に関する帰納法を用いるが，その過程で純対数端末中心と呼ばれる多様体の正規性が重要な問題となる．この正規性は標数 0 ではよく知られた事実であるが，正標数では未解決のままであった．田中氏は Paolo Cascini

氏との共著において，3 次元で標数 2 の場合に反例を構成し，正標数の MMP には標数 0 とは異なるアプローチが必要であることを明らかにした．また，呼子笛太郎氏，Jakub Witaszek 氏，吉川翔氏，河上龍郎氏，高松哲平氏との共同研究において，田中氏は準フロベニウス分裂多様体の双有理幾何学に関する基礎理論を確立した．準フロベニウス分裂多様体は，フロベニウス分裂多様体の一般化として Witt 層を用いて呼子氏によって導入されたが，その幾何学的性質はよくわかっていなかった．一連の共同研究により，標数が 43 以上の 3 次元対数端末特異点は準フロベニウス分裂的であること，標数が 41 の場合には反例が存在することなどが証明された．また，最近では正標数の 3 次元非特異 Fano 多様体の分類を完成させるなど、田中氏の研究はますます活発化している．

このように，田中氏は数多くの決定的な成果を挙げており，正標数の双有理幾何学において世界的な第一人者として知られる．その業績は代数学賞にふさわしいものである．

（代数学賞委員会委員長　市野篤史　京都大学大学院理学研究科）