

会員ニュース

山下真由子氏の Dannie Heineman Prize 受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科

河東 泰之

山下真由子さんがドイツ Göttingen 科学アカデミーの 2024 年の Dannie Heineman Prize を受賞した。2023 年の Maryam Mirzakhani New Frontiers Prize (Breakthrough Foundation) など、受賞紹介記事が追いつかないようなペースで国内外の賞を取りまくっており、大変おめでたいことである。

アメリカ物理学会も数理物理学を対象とした同名の賞を出していて紛らわしいのだが、こちらはそれとは別の賞である。(同じ名前がついているのは同じ人が寄付したからである。) こちらの賞は数学、物理学、化学、生物学が対象で、ほぼ 2 年間隔でこれらのうちの一つに授賞される。4 部門の順番がきっちり決まっているわけではないのだが、当然ながら数学の番が回ってくるのにはかなり待たなくてはならず、数学に授賞されたのは過去 63 年間で今回を含めて 9 回である。これまで 8 人の数学の受賞者には、Shafarevich, Griffiths, Faltings, Demailly, Taylor などが含まれており、そのレベルは極めて高い。物理学部門でもこれまで 9 人の受賞者のうち、Anderson, Müller, Bednorz, Ketterle はこの賞の受賞後もなく Nobel 物理学賞を受賞している。最近は、かつてのようにすでに決定的な業績を挙げた人よりは、これからそういう業績を期待できる若い人にこの賞を出すようにしているのだ、と Göttingen の人から聞いたが、それでもたとえば、数学部門で前回の受賞者は 2019 年の Randal-Williams で、彼は、Cambridge 大学 Sadleirian 教授、Clay Research Award 受賞者、ICM 招待講演者、イギリス王立協会フェロー (FRS) である。(Sadleirian 教授とは、Cayley, Hardy, Mordell, Coates などが過去についていた Cambridge 大学の特別の数学教授ポストである。) また、63 年間の全部門で、日本人がこの賞を受賞したのは初めてである。

Göttingen 科学アカデミーは 1751 年に創設されたもので、昔の会員には Gauss, Riemann, Hilbert (いずれも Göttingen 大学所属) など含まれているということだ。これまでの通算では(通信会員も含む)会員のノーベル賞受賞者は合計 74 人である。現在の数学の会員は 21 人で、Catanese, Faltings, Frey, Heath-Brown, Helfgott, Kreck, Schick などが含まれている。日本人でも小平邦彦氏はここの通信会員であったということだ。このアカデミーはその名の通り、Göttingen に建物を持っており、この賞の授賞式は 2024 年 11 月に Göttingen で行われた。

山下さんへの授賞理由はドイツ語で書かれているが、訳すと「場の量子論におけるアノマリーの数学的に正確な記述」に対するものとなっている。この授賞理由が直接意味してい

るのは立川裕二氏との2つの共著論文 “Topological modular forms and the absence of all heterotic global anomalies” (Comm. Math. Phys. 2023 年) と “Anderson self-duality of topological modular forms, its differential-geometric manifestations, and vertex operator algebras” (arXiv:2305.06196) であると思われるが、これらの業績については『数学通信』28 巻 3 号の私の記事や『数学通信』29 巻 3 号の立川裕二氏の記事に解説がある。後者のプレプリントは 2023 年 5 月にポストされた後、2024 年 5 月に大幅な改訂、拡張が行われており、論文の長さも 79 ページから 93 ページに増えているのだが、山下さんは最近もその流れで次々成果をあげているので、ここではその発展について紹介することにしよう。なおこれらの研究の基本的な問題設定については、上記2つの『数学通信』の記事も参照していただきたい。

山下さんの最近の研究対象は物理学、特に超弦理論における問題意識から生じる代数トポロジーの問題である。その中で2次元 $\mathcal{N} = (0, 1)$ -超対称ユニタリな場の量子論の分類を数学的に記述するための Segal–Stolz–Teichner の提唱というものがあり、これが山下さんの一連の結果のおおもとになっている。(ここでの場の量子論というのは、数学的にはある種の関手と考えられるが、厳密な形で定式化されておらず、数学として何を意味するのか明らかではない。その数学的な定式化を代数トポロジーの枠組みで与えるのがこの Segal–Stolz–Teichner の提唱である。) この路線で山下さんは、上述の立川氏との2本の共著論文に続けて最近、Johnson-Freyd との共著論文 arXiv:2404.06333 と、Lin との共著論文 arXiv:2412.02298 を書いている。

Topological modular forms の頭文字である TMF と書かれる一般 cohomology 理論があり、2次元 $\mathcal{N} = (0, 1)$ -超対称ユニタリな場の量子論 (SQFT) と呼ばれる物理的な対象の分類を数学的に記述すると期待されている。複素 K 理論、実 K 理論がそれぞれ周期2と8を持つことの類似として、この TMF は周期576を持つことが分かっている。しかしこの事実の現在知られている証明は、スペクトル系列の計算によるもので、より微分幾何学的な証明が求められてきた。Johnson-Freyd との共著のプレプリント “On the 576-fold periodicity of the spectrum SQFT: The proof of the lower bound via the Anderson duality pairing” は、この周期が少なくとも576であることを、山下さんのこれまでの結果の応用として幾何学的に証明したものである。(一方周期が高々576であることについては別の論文で示す予定とアナウンスされている。) Johnson-Freyd は Berkeley の Reshetikhin のところで博士号を取った人で、場の量子論に関連する圏論、表現論、ホモトピー論などの研究で知られている。作用素環におけるテンソル圏の研究とも関係していて、私も何度か作用素環と数理解物理学のコンファレンスで会ったことがある。

一般 cohomology 理論を homotopy 類として実現するある種の位相空間の列をスペクトラムという。その中でさらに良い構造を持っているものを E_∞ 環スペクトラムという。こ

の論文では一般的に、ある仮定を満たすスペクトラム SQFT の周期が少なくとも 576 であることを示している。その仮定の一つは、 $KO((q))$, $M\text{Spin}$, $M\text{String}$ などの E_∞ 環スペクトラムの間である可換図式を満たすことである。ただし、 $M\text{Spin}$ と $M\text{String}$ はそれぞれ、 spin bordism 群と string bordism 群を実現する Thom スペクトラム、 $KO((q))$ は KO を係数とする Laurent 級数を実現するスペクトラムである。(TMF がこれらの仮定を満たすことはすでにわかっているのでこの一般的結果が示せば十分である。) 山下さんの立川氏との前の成果である Anderson duality pairing は、この仮定だけから導かれるので今の設定でその手法が使えるようになる。また、この pairing は相対 Witten 種数を用いて記述されるものである。

最新の Lin との共著のプレプリント “Topological Elliptic Genera I – The mathematical foundation” のテーマは位相的楕円種数である。これは、上述の Segal–Stolz–Teichner の予想の同変版を考える研究で、さまざまな群の作用についてスペクトラムの間の morphism を構成することが主結果である。(これらの morphism を総称して位相的楕円種数と呼んでいる。) いろいろな群についての同変 TMF が考えられるが、この論文における重要な一例としては例えば、tangential $SU(k)$ -bordism のスペクトラム $MTSU(k)$ から topological modular forms の $U(1)$ -同変版である topological Jacobi forms のスペクトラム TJF_k への morphism である $Jac_{U(1)_k}$ が構成できるという結果がある。 $U(1)$ の代わりに $Sp(1)$, $O(1)$ を考えた場合もこの論文で扱われている。なお TMF の同変版は Gepner–Meier によるもので、Lurie のアイディアに基づく。この論文は 90 ページの大作だが、題名に “I” とあるようにまだシリーズの第 1 弾ということで、これからこの路線でのさまざまな発展が予定されている。To appear と書かれているプレプリントがいくつもあり、山下さんはこの方面の研究をものすごい勢いで進めている。

「位相的」という言葉がつかない古典的な楕円種数とは、ある種の多様体に対してある種の無限級数を対応させるもののことで、ここでは特に、 $2k$ 次元の tangential $SU(k)$ -多様体(多様体にある種の幾何学的構造を入れたもの)に対して、指数 $k/2$ 、重さ 0 の整数係数 Jacobi form を対応させるものを考えている。これは Witten–Landweber–Ochanine 種数などさまざまな方向に拡張されているものだが、山下さんたちの新しい位相的楕円種数は、古典的な楕円種数より細かい情報を含んでいるものである。すなわち、上の写像 $Jac_{U(1)_k}$ に e_{JF} という写像を合成すると古典的な楕円種数が再現できるという関係にある。 e_{JF} は単射ではないので、位相的楕円種数の方が古典的な楕円種数より多くの情報を持っていることがわかる。

これらの新しい構成はたいへん大掛かりな道具を使うが、古典的な幾何学的問題への応用もあり、例えば多様体の Euler 数の取りうる値への制限が得られる。具体的には、tangential $Sp(k)$ -manifold M と呼ばれる種類の多様体(実次元は $4k$ となる)について、その Euler

数が $24/\gcd(24, k)$ の倍数となることが示される。これは多くの場合について、これまで知られていた結果より強い制限を与える。例えばこれまでは 12 の倍数であることが分かっていたが、実は 24 の倍数でなくてはならないことが分かった、といった種類の結果である。

山下さんは 2024 年秋に Harvard 大学にしばらく滞在していたが、この論文は主にその成果である。共著者の Ying-Hsuan Lin は Harvard 大学の物理のポスドクで、上述の立川裕二氏といくつか共著論文があり、作用素環から生じる Haagerup テンソル圏の 2 次元共形場理論での実現などの研究もしている人だが、残念ながら金融業界に転職することになったということである。

山下さんは 2023 年 4 月に 27 歳で京都大学数学教室の准教授となったが、2025 年 4 月からはカナダの理論物理学の研究所、Perimeter Institute への移籍が決まっている。この研究所は携帯端末の BlackBerry を作っている会社の創設者 Lazaridis が私財を投じて 2000 年に設立した私立の研究所で、カナダの Waterloo にある。これは Lazaridis がこの地で育ったからで、彼の出身大学である Waterloo 大学もこのすぐそばにある。Toronto からは車で 1 時間強の距離である。私は 2024 年 11 月に行ったが、たいへん立派な建物で入り口には $\text{ΑΣΠΟΥΔΑΣΤΟΣ ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ}$ というギリシャ語が書かれている。これは、プラトンの言葉とされる「幾何学を知らざる者、入るべからず」を少し変えたもので「幾何学に興味のない者、入るべからず」という意味だとのことだ。

山下さんの引き抜きを主導したのは同研究所の Costello で、renormalization, topological quantum field theory, factorization algebra など著名な数理論理学者である。上に書いた山下さんの共著者の Johnson-Freyd も Dalhousie 大学とこの研究所のポストを兼任している。また超弦理論で有名な Gaiotto や、素粒子理論の日本人の吉田紅氏もこの研究所の所属である。

日本の数学界としては国際的な若手のスターがいなくなってしまうのはたいへん残念なことだが、山下さんのスケールは国などに縛られないものである。『数学通信』27 巻 2 号の私の記事にも書いた通り、山下さんは最初は東大工学部計数工学科の学部学生だったのだが、東大数理の大学院に飛び級入学し、数学科の教育を受けていないことなどもとせず、非可換幾何学ですぐれた業績を挙げて 23 歳で京都大学数理解析研究所の助教となった。その後は自分で研究の幅を大きく広げて超弦理論の数学や代数トポロジーで次々と驚くべき成果を出し、私が指導した（といっても山下さんは勝手に研究したので私はほぼ何も指導などしていないが）作用素環論や非可換幾何学からはだいぶ離れたところまで行ってしまった。今度は数学ではなく理論物理学の研究所に移籍ということで、山下さんは分野や国の境界も軽々と飛び越えている。これからも世界のエースとして活躍し続けてくれることを期待している。