書　評

群と幾何をみる

—無限の彼方から—

正井秀俊 著，日本評論社，2023 年

京都工芸繊維大学基盤科学系
室谷　岳寛

本書は『数学セミナー』の連載（2021 年 4 月から 2022 年 3 月）に加筆・修正を加えたものであり，2020 年度に著者が東京工業大学（現 東京科学大学）で行った講義のノートがその原型となっている．本書の主題は「幾何学的群論」，即ち「群を幾何を使って調べる」ことである．幾何や群の基礎的な事項から始まり，双曲幾何やグロモフ双曲群をかなり本格的に扱い，最後には最近の研究の雰囲気まで味わえる，盛り沢山な内容が 180 ページ程度にまとめられている．冒頭の「ごあいさつ」にもあるように，群ではなく「幾何から始まる」ことが類書との大きな違いであり，これは幾何学やトポロジーを専門とする著者の性格を反映している．一方で，著者や本書の専門性に反して（？），評者の専門は数論幾何学，特に遠アーベル幾何学であり，お恥ずかしい話ではあるが幾何学そのものに関してはほぼ素人である．「群を幾何を使って調べる幾何学的群論」の本の書評を，「群から幾何を思い出す遠アーベル幾何」の人間が手掛けるのも面白かろうということで今回のお話をいただいたが，あくまで本稿は他分野を専門とする者による書評であるということを最初にお断りしておく．とはいえ，本書は（その原型も示唆する通り）高度な専門知識がなくても全体の流れは十分に理解でき，また楽しめる一冊である．本書における著者の軽妙で生き生きとした筆致には及ぶべくもないが，本稿を通じて本書の魅力を少しでも感じていただくことができれば望外の喜びである．

さて，本書の最大の特徴は，何と言ってもそのユーモアに溢れた明るい「ノリ」である．本を手に取って開くと最初に目に入る「ごあいさつ」が既に，いわゆる従来の数学書との「ノリ」の違いを予感させるものであるが，その予感は直後の目次，そして第 1 章で確信へと変わる．何しろ，第 1 章「序論」の副題からして「オカンと幾何と群」である．想像を掻き立てられながら期待を膨らませて「序論」を開くと，突如として始まるのは漫才である．比喩や誇張ではない．本当に漫才が始まるのである．おそらく，数年前に人気を博した，オカンが名前を忘れてしまったものをその特徴を挙げながら思い出そうと試みる漫才をモチーフとしたものであろう．評者は大阪出身の関西人でお笑いには一家言ある（？）が，この「序論」はせりふ回しやテンポ感など，純粋に漫才としても素晴らしい（ただし関西

弁は所々怪しい）．ネタバレを防ぐために詳細は伏せるが，ここでオカンが忘れてしまったものは，本書のメインテーマである．このコンビの漫才は，対象の特徴を浮き彫りにして，その対象に少し詳しくなったり興味が喚起されたりするところに良さがあるが，この良さが「序論」でも最大限に生かされており，本書のテーマの最良の導入となっている．さらに，実は「忘れる」という言葉も本書の重要なキーワードとなっており，この「序論」はその伏線を張るという役割も担っている．あまりにインパクトが強いので「序論」の紹介に紙幅を割いたが，続く各章もその章の内容につながる「お話」から始まり，この「ノリ」は本書の至るところで顔を出す．一方でその「ノリ」の中に著者の数学に対する愛や深い洞察が垣間見え，ハッとさせられる箇所も多くある．この絶妙なバランスによって本書は，単なる「数学書」としてのみならず，「読み物」としても多くの人が楽しめるものとなっていると言えよう．また，各章に一つずつ描かれた Xiaobing Sheng 氏による絵も，「読み物」としての本書に温かみを添えるものとなっている．

さらに，本書のもう一つの特徴として，全体を通して抽象性の高い一般論やお決まりの性質の詳細な証明などの煩雑な議論を巧妙に避けつつ，代わりに定義の直感的な説明や具体例を丁寧に述べることで，迷子にならずに確かな手応えを感じながら読み進められるように配慮がなされている．「読み物」として本書を楽しむ読者には親切な設計であり，学部学生などが読む場合には，その行間を埋めることが良い演習となるであろう．

以下，未読の方の楽しみを損ねない範囲で各章の内容を見ていく．第 1 章では既に述べた漫才のあとで，作用やそれによって生じる対称性との関連を強調した形で群が導入される．これは続く第 2 章・第 3 章のための準備にもなっている．第 2 章では基本群が，第 3 章では普遍被覆が取り上げられる．「ごあいさつ」での宣言通り，幾何学的群論の群論的な側面に先立ち，幾何の話題である．幾何学的群論の理解のために基本群の概念は必ずしも必要ではないが，基本群が普遍被覆に作用する様子は幾何学的群論のアイデアの出発点であると著者は指摘しており，その意味で本題に入る前の重要な導入部分と言えよう．第 4 章では多様体と幾何構造が定義される．本書の主題の一つである双曲幾何の本格的な導入は次章までお預けであるが，その動機づけとなる章である．本章の冒頭で議論される負曲率と葉っぱとの関連性は非常に興味深い．

第 5 章では本書の重要なテーマの一つである双曲幾何を，主に 2 次元の場合に絞って扱う．前半には簡潔ながらも勘所を押さえた説明により双曲平面の性質がまとめられている．後半では前章からの流れを受けて，種数 2 以上の曲面が双曲幾何をもち，その幾何が多様に変形しうること，そしてその一方で 3 次元以上の双曲幾何が変形しない（著者の言葉を借りるならば「カッチカチ」，遠アーベル風に言えば「尋常ならざる剛性」をもつ）こと，即ちモストフ剛性が紹介される．ここまでに著者は，トポロジーは「幾何を忘れて形の本質に迫る」分野だと折に触れて強調してきており，数学に詳しくない読者にもモストフ剛

性が（数学的主張として）如何に強力であるかが理解できるであろう．第 6 章ではタイヒミュラー空間を扱う．著者自身も述べているように，タイヒミュラー空間は幾何学的群論のテキストの題材として標準的ではないが，タイヒミュラー空間を通して初等双曲幾何に親しむことができ，前章で学んだ内容に確かな手触り感を与える．これも本書の大きな特徴の一つである．さらに，モジュライ空間の普遍被覆としてのタイヒミュラー空間とそこへの群作用を考えるという意味では，本章は第 2 章・第 3 章の延長線上にあるとも言える．

第 7 章からはいよいよ本格的に幾何学的群論の話題に入る．第 7 章では自由群，有限生成群とそのケーリーグラフが導入される．本書ではいくつかある自由群の構成法の「美味しいとこどり」をすることで短いページ数ですっきりと自由群の性質がまとめられている．ケーリーグラフも豊富な具体例が与えられ，最後は有限生成群の（ある生成系に対する）ケーリーグラフが木であることと群が自由群であることとの同値性が証明抜きで紹介される．続く第 8 章では擬等長写像を通して，有限の誤差を無視して空間を研究する「粗い幾何」が展開される．これはあたかも「無限の彼方から」空間を眺めるかのような視点であり，本書のタイトル（副題）が回収される．幾何学的群論では群を幾何を持つ空間に作用させることで群を調べるが，ここで第 2 章・第 3 章の内容が生きてくる．まず，有限生成群はその生成系からケーリーグラフが定まり，さらに語による距離によって群それ自身も距離空間となる．これらの距離空間は生成系の取り方に依存するが，その擬等長類は生成系に依らず，さらにケーリーグラフと群自身も擬等長である．加えて，スバーク－ミルナーの補題により，コンパクトな多様体の普遍被覆と基本群は擬等長となることもわかり，読者は「群の幾何」が次第に具体性を持って眼前に現れるさまを体験することになる．

このようにして見出した群の幾何の性質を調べるのが第 9 章以降である．第 9 章では「三角形が細い」測地空間としてグロモフ双曲空間を定義する．このような空間では擬測地線は測地線の近傍に含まれ（モースの補題），その帰結としてグロモフ双曲性が擬等長不変であることがわかる．これにより，（有限生成）群のグロモフ双曲性を，ある（したがって任意の）生成系に関するケーリーグラフのグロモフ双曲性として定義することができる．第 10 章の前半ではグロモフ双曲群の幾何の応用として，双曲群に対しては語の問題（有限表示 $\langle S|R\rangle$ を持つ群 G において，S 上の任意の語が G で単位元に一致するか否かを判定できるか？）が解けることの説明がなされる．第 10 章の後半は第 4 章にも現れた葉っぱと双曲性，さらには機械学習，ニューラルネットワーク，囲碁などをめぐる「お話」的な部分である．奇しくも 2024 年のノーベル物理学賞の受賞テーマは人工ニューラルネットワークによる機械学習であり，さらに化学賞の受賞者の 1 人のハサビス（受賞テーマは AI によるタンパク質の構造予測）は AI を用いた囲碁ソフト「AlphaGo」の開発者であるが，この「お話」もこれらに関連するものである．もちろんこれらのノーベル賞受賞は本書の出版後の出来事であり，著者の慧眼にはただ感服するばかりである．著者のバックグラウンドにも触れ

た親しみやすい文章の中に，著者の AI と人間の知能をめぐる深い洞察や理想・展望が描かれており，本書の中でも評者が特におすすめしたい部分である．第 11 章では双曲群のグロモフ境界が導入される．擬等長写像は一般には連続でないため，グロモフ双曲空間の擬等長類を考える際に内部の位相は忘れられる一方で，グロモフ境界は擬等長でその位相ごと保たれる（つまりグロモフ双曲空間の擬等長写像はその境界の同相写像を誘導する）ことが示される．さらに双曲群のティッツ背反（つまり双曲群の無限部分群は $\mathbb{Z}$（に同型な群）を指数有限の部分群として含むか，階数 2 の自由群を部分群として含むかのいずれかである）の「プチ」版を述べてその一部が証明される．前章とは雰囲気が変わり，数学的にやや重めの章ではあるが，ここでも明るい「ノリ」と丁寧な説明で話が展開されているので，「粗い」グロモフ空間の内部と，それと比較すると「精緻な」境界の対比を無理なく楽しむことができるであろう．

最後の第 12 章のテーマは写像類群である．種数 2 以上の閉曲面の写像類群はグロモフ双曲群ではないが，そのような閉曲面の曲線グラフはグロモフ双曲空間であり，写像類群は曲線グラフに作用する．さらにその応用として後半ではランダム 3 次元多様体の話題が展開される．この分野はいわば「有限の誤差を忘れる」擬等長写像（および幾何学的群論）と「確率の小さな事象を忘れる」確率論との交差点に位置するものであり，終盤では著者自身の結果も紹介される．つまり，冒頭から一貫したテーマであった「忘れる」ということの威力と重要性が著者自身の結果をもって語られ，本書は締めくくられるのである．なお，その後の「おまけ」の章では閉曲面の曲線グラフの双曲性が証明され，「参考文献案内」では各トピックの参考文献がコメントともに示される．著者は工学部出身で，学部レベルの数学は本で独学したということで，そのチョイスやコメントには説得力があり，さらに学びたい読者のための心強い指針となるであろう．

新たな数学書を手に取り開くとき，我々の（少なくとも評者の）胸は新たな数学との出会いに対する期待と，それを必ず理解して自分のものにしようという気合に満ちている．しかし，そのようなモチベーションは本を閉じるまで（それが頓挫して閉じるのであれ，幸運にも最後まで読み遂せて閉じるのであれ）保たれているとは限らない．そのような中で本書は，著者の楽しい「ノリ」に助けられつつ，一つのテーマについて着実に理解が深まる手応えを得ながら読み進められるようになっている．入門書として初学者・学生が使うのはもちろんのこと，研究者にとっても読みごたえがあり，さらには数学に親しみが薄い人であっても興味さえあれば幾何学的群論の雰囲気を楽しむことができる，本書はそんな稀有な一冊であると言えよう．