

## 書 評

### ポアンカレ予想

—高次元から低次元へ—

小島定吉 著，石川剛郎，大槻知忠，佐伯修，三松佳彦 編，共立出版，2022 年

日本大学文理学部

市原 一裕

本書は共立出版のシリーズ「ひろがるトポロジー」の3冊目にあたるものです。上記4人の编者によるこのシリーズは「いろんなトポロジーのこれからをひらいていく」というキャッチフレーズのもと、2024年未までに、本書以外に『デーン手術』（茂手木公彦著）、『距離空間のトポロジー』（川村一宏著）、『4次元多様体とファイバー構造』（遠藤久顕・早野健太著）が出版されています。

正直に言えば、この本の書評の依頼が来たとき、引き受けるかどうか、かなり悩みました。これまで書評は書いたことがなく、しかも大学院時代の指導教官である小島先生の本ということで、自分にできるのか、とても不安だったのです。しかし思い切って小島先生にも相談し、またこれまでも「ポアンカレ予想」に関しては様々に御縁があったことから、思い切ってお引き受けすることにしました。とはいえ、うまく書評として書けているか、甚だ心配です。少しでもこの書評を通じて、この本の良さを皆様に知ってもらえれば嬉しく思います。

さて、これまでも「ポアンカレ予想」についての書籍は多くありました。それらは、いわゆる一般向けの啓蒙書であったり、一方で、専門家向けの詳細な解説書もあったかと思えます。それに対して本書はというと、「まえがき」にはおおよそ次のように目的が書いてあります。「シリーズの趣旨である“現代トポロジーの入門を記し、若い読者のその後の発展に資する”に沿って、ポアンカレ予想に関する100年の歴史を綴る。」つまり、トポロジーもしくは関連分野を学ぶ数学科の大学4年生もしくは大学院生を意識して書いているようです。実際、かなり具体的な読者像を想定しているらしく、次のような説明もあります。「幾何系の4年生なら読み始められるが、たとえばセミナーで取り上げるとすると、自己完結している本を読む場合と、いろいろ事前に調べる必要がある論文を紹介する場合の中間くらいの量の独自の学習が必要になる。」まさに僕からみても、そういうように読めました。正直に言えば、(普通の)学部生が単独で読むにはかなりハードルがあるかと思えます。行間のギャップが大きかったり、記号が急に出てきたり、初学者には不親切に思われるところも、僕にはあるようにみえました。したがって、丁寧にすべてを理解しようとするのは

大変でしょう。一方で、端的な説明に乗って、おおまかな流れを理解し、それについて学ぶ動機を得るのには、とても良いと思います。もちろん大学院生がチャレンジとして読んでよさそうですし、専門家が歴史を振り返り全体像をつかむのに読むのにも十分な読み応えがあります。なお学生のセミナー等で扱うには、指導担当教員の力量がかなり問われると思います。

一般書ではないので、すべての方におすすめとは、さすがに言えません。ある程度の数学的な素養と知識、理解力、モチベーションは必要でしょう。しかし、それらをもつ「想定している若い読者」にとっては、非常に魅力的な本なのは間違いないと思います。少なくとも、もし自分が大学生の時にこの本があったら（通読し深く理解するのは多分、無理だったとは思いますが）きっともっとトポロジーに興味を持ち、より先に進む後押しをしてくれたのになあとと思います。

また本書は、小島先生のこれまでの著作『多角形の現代幾何学』『3次元の幾何学』『トポロジー入門』同様、もしくはそれ以上に、研ぎ澄まされた語り口が特徴的です。必要なことだけを鋭く明確に述べていく感覚が、慣れてくると癖になります。（この書き口はなかなか真似できません。）一方で、感覚的につかみやすい適切な例を多く配置してあり、また、いわゆる教科書のような「定義・定理・証明」という固い流れもありません。さらっと進める「読みやすさ」ではないかもしれませんが、繰り返し読むことで馴染んでくる自然さがあります。さらに、Xiaobing Sheng（盛小冰）さんによる絵心のある挿絵（図版）も、本文と素敵にマッチしていて見事です。

ここから各章の内容について、本当にざっとですが説明していきます。（専門的な用語の説明は省略します。詳しくはぜひ本書を読んでください。）

第1章「ポアンカレ予想」は、全体への序章となっています。まず19世紀のポアンカレ以前の複素解析の結果（コーシーの積分定理）やリーマン面に触れ、それを序奏として、ポアンカレの業績を紹介し、その後の100年の流れ、次章から説明していく内容を（たった7ページほどで）概観しています。ここでは専門用語にあまり拘らず流暢に説明されていくままに、キーワードだけ心に留めた助走とすれば良いかと感じます。ほんの数行ですが、いわゆる古典的な（20世紀前半の）3次元多様体論（デーネンやパパキリヤコプロス）の結果にも触れています。なお、6ページのコメント1.10でPL圏の話も出てきますが、この本では以降、あまり深くは触れられていません。PL圏のポアンカレ予想についての概説としては（この本の参考文献には入っていないのですが）加藤十吉先生の「ポアンカレ予想の周辺」（『数学』第31巻第4号（1979））が参考になるかと、個人的には思います。

第2章「代数的トポロジーダイジェスト」では、圏論のことばを使って、ホモトピー論・（コ）ホモロジー論が、鮮やかに紹介されていきます。ここだけでも学部4年生のセミナーで扱ったり、もしくは意欲のある学生（3年生でも）が独習のテキストとしても良い気がし

ます。古典的な代数的トポロジーのテキストとは違う特徴（単体的複体から始まっておらず、また、その流れの中で多様体や群作用が紹介されている）もあります。何より本当に自然な土台として圏の説明から始まっていることに、僕は少し戸惑いました。しかし、読み通してしまえば、確かにこれが最短経路なのかなと思わされます。今後の代数的トポロジーのテキストではこういうスタイルが増えてくるのかもしれませんが。強いて言えば、次章以降との関連があまり見えないのは気になります。背景に隠れてしまっているだけですが、後の章の中で、もう少しこの第2章（の定義・定理等）を参照してくれるとよりわかりやすかったかなと思いました。

ここからが本番で、第3章「高次元」では、5次元以上の一般化されたポアンカレ予想について説明されます。3.1節では、 $C^\infty$  圏におけるミルナーのエキゾチック7-球面について、3.2節ではスマイルの  $h$ -同境定理から高次元ポアンカレ予想の証明（の概略）、そして3.3節では、その  $h$ -同境定理の証明が概説されます。たかだか30ページ（しかも図が多い）でこの内容を書き切ることに感嘆しました。しかも流れが見やすくわかりやすいので、詳細まで分からなくても読み進められるのではないのでしょうか。ただ次の章に進むために、ここでハンドル分解については、よく見ておくほうが良いと思います。また個人的には、5次元以上のPL圏における結果について、この章でもう少し触れても良かったのかなと感じました。

第4章「4次元」では、フリードマンによる4次元（位相的）ポアンカレ予想の解決について説明されています。4.1節ではその鍵となるキャッソンハンドルの紹介、4.2節でフリードマンの結果とその系としての4次元（位相的）ポアンカレ予想の解決と、さらに単連結4次元  $C^\infty$ -多様体の位相的分類定理までが説明されます。その最後、4.2.2節「ビングトポロジー」でフリードマンの定理についての幾分詳しい説明がありますが、さすがにここは初見で理解するのは難しいかなと感じました。実際、例えば有名な本間龍雄先生の『ポアンカレ予想物語』（日本評論社、1985年）ではかなりのページ数を割いて説明してありました。またドナルドソン以降の4次元多様体のエキゾチック構造については、近年、研究の進展が著しいので（第6章で少し触れられていますが）現状をまとめて欲しかったと（単なる個人的な興味ですが）思いました。なお4次元のトポロジーについて、詳しくは、松本幸夫先生の『4次元のトポロジー』（日本評論社、新版2016年）がやはり名著だと思いますのでおすすめです。（その最後に加えられているのは、加藤十吉先生、小島定吉先生、福原真二先生、松本幸夫先生による1979年の座談会の様子です。）

そして、第5章がハイライトである「3次元」についてです。5.1節で4次元以上と3次元の差異に触れた後、5.2節でサーストンの幾何化予想が20ページほどで紹介されています。この節の一部は、シリーズ「ひろがるトポロジー」の1冊である茂手木公彦先生の『デー手術』と重複があり、3次元多様体論については、こちらが参考になると思います。5.3節

ではリーマン幾何からの準備として、グロモフの崩壊理論の説明のあと、塩谷-山口の定理が紹介されます。(ここは僕には少し読みにくく感じました。勉強不足です…)最後に5.4節ではフィナーレとして、リッチフローについての解説と、そしてペレルマンによる3次元ポアンカレ予想の解決(定理5.73)と幾何化予想の解決(定理5.74)が紹介されています。

続く6章「解決から20年」があとがきのようなもので、ペレルマン以降の現在のトポロジーを取り巻く状況が概観されています。最後、締めくくりの一文「それにしても、本シリーズのタイトルは時機を得ている。」にはしびれてしまいました。

以上、本の内容についてざっと書いてみました。やはり力不足でうまくまとめきれませんが、少しは本書の魅力をお伝えすることができたでしょうか。

蛇足かもしれませんが、最後に個人的な感想です。今回の書評を書くにあたって、本書を繰り返し読み、また限られた範囲ですが原典の論文も眺めていて、自分だったらどう書くかを考えるのが少し楽しかったです。実際、以前に一般向けの啓蒙書としてポアンカレ予想について書いた拙著が、大きく外れてはいなかったという安堵も得られました。

小島先生の著書やサーベイ論文(たとえば、2001年の『数学』第53巻第2号の記事「Poincaré予想」)を読んだり、さまざまな講演を聞いたりすると、いつもその簡潔さ・淡麗さに圧倒されます。それをこの書評で伝えることは、僕では力不足なので、ぜひそれらに実際に触れていただくことを心からおすすめします。