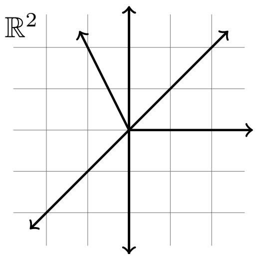
小田予想について

京都大学大学院理学研究科

藤野　修

1　はじめに

本稿は，日本数学会 2024 年度秋季総合分科会市民講演会（2024 年 9 月 7 日，大阪大学）の講演記録です．講演会では，小田予想やそれに関連する代数幾何学のお話をさせていただきました．タイトルにある「小田予想」とは，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の分割に関する初等的な予想です．問題は初等的ですが，長年未解決のままです．ここで，$\mathbb{R}^2$ の分割とは，以下のような図のことです．



一般に，$\mathbb{R}^n$ の分割は**トーリック多様体**と呼ばれる代数多様体と対応します．さらに，代数多様体の**双有理幾何学**のいくつかの問題（たとえば，**特異点解消，半安定還元，弱分解**など）は，トーリック多様体（正確にはトロイダル）の問題に帰着できます．ちなみに，トーリック多様体論の創始者の一人が**小田忠雄**先生です（[10]）．本稿を読んで興味をもち，小田予想を解決する人が現れることを期待しております．

本稿では，慣例通り，$\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すことにします．

2　2 次元小田予想（解決済み）

まずは 2 次元の場合の小田予想について詳しく説明したいと思います．小田予想は 2 次元以上で意味のある予想で，2 次元の場合は解決済みです．3 次元以上では未解決の問題です．我々の扱いたい 2 次元ユークリッド空間の分割を厳密に定義していきましょう．

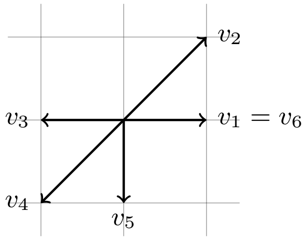
- 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ を有限個のベクトルで分割します．厳密に言うと，ベクトル

を正の方向に無限に延ばします.

- 有限個のベクトルを反時計回りに $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} = v_1$ と書くことにしましょう.
- ベクトル v_i を以下のように列ベクトルで書くことにします.

$$v_i = \begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

たとえば下の図のような感じです.



さらに以下のルールを満たすと仮定します.

(1) ベクトルの成分 a_j^i はすべて整数.

(2) ベクトル v_i からベクトル v_{i+1} への回転角は 180 度未満.

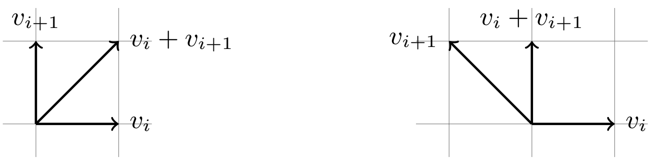
(3) $a_1^i a_2^{i+1} - a_1^{i+1} a_2^i = \pm 1$ を満たす.

(1) は**有理性**と呼ばれます．ベクトルの傾きが有理数になるからです．(2) は**強凸性**と呼ばれます．これは幾何学的に凸だからです．(3) は**非特異性**と呼ばれます．(3) の条件は

$$\det \begin{pmatrix} a_1^i & a_1^{i+1} \\ a_2^i & a_2^{i+1} \end{pmatrix} = \pm 1$$

とも書けます．これは言い換えると，$\mathbb{Z}v_i + \mathbb{Z}v_{i+1}$ が $\mathbb{R}^2$ の格子点全体 $\mathbb{Z}^2$ になるという条件です．ここでは，このような $\mathbb{R}^2$ の分割を Δ と書き，2 次元**完備非特異扇**と呼ぶことにしましょう．小田予想では爆発と呼ばれる操作が必要になります．

定義 2.1（爆発）　Δ にベクトル $v_i + v_{i+1}$ を追加して得られた新たな分割 Δ' を Δ の**爆発 (blow-up)** と呼びます．Δ' が Δ の爆発であるとき，この対応を $\Delta' \to \Delta$ と書きましょう．



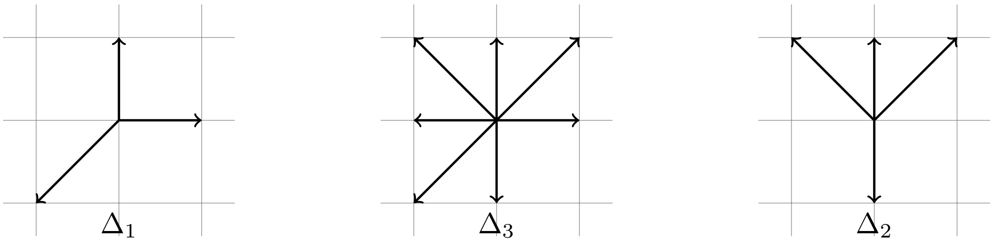
爆発という物騒な名前がついていますが，これは対応する代数幾何学の用語を使っています．次の補題は簡単に確認できます．

補題 2.2　爆発 Δ' も 2 次元完備非特異扇である．

有理性と強凸性は定義からほぼ明らかです．非特異性は具体的に計算してみればわかります．行列式の性質を考えれば明らかでしょう．やっと小田予想に到達です．

定理 2.3（2 次元小田予想）　2 次元完備非特異扇 Δ_1 と Δ_2 が与えられたとする．このとき，Δ_1 と Δ_2 に各々有限回爆発を適当に繰り返すと，同じ 2 次元完備非特異扇 Δ_3 に到達する．

下の図で Δ_1 と Δ_2 を有限回爆発して Δ_3 に到達できることを確認してください．



2 次元小田予想は明らかでしょうか？ Δ_1 や Δ_2 がとてもたくさんのベクトルでの分割だった場合，本当に正しいでしょうか？ たとえば，Δ_1 や Δ_2 が一億本のベクトルとか一兆本のベクトルでの $\mathbb{R}^2$ の分割だとどうでしょうか？ 幸いなことに，2 次元小田予想は，頑張れば素朴な議論だけで証明できます（[10, Theorem 8.2] や [11, 定理 1.28] を参照）．実は，**代数幾何学** (トーリック多様体論) を使えば，一般的な理論からほぼ自動的にしたがいます（[10] や [11] を参照）．もちろん話は逆で，代数幾何学の予想をトーリック多様体論を通じてユークリッド空間の分割の予想にしたのが**小田予想**です（[10, Section 9] を参照）．

注意 2.4　講演会では定理 2.3 の証明については何も述べませんでしたが，要望があったので，ここに証明のスケッチを書いておきます．証明に興味のない方は読み飛ばしてください．

　Δ_1 と Δ_2 の分割にあらわれるベクトル全部で $\mathbb{R}^2$ を分割したものを Δ' と書くことにしましょう．Δ' は (1) と (2) の条件は満たしますが，残念ながら (3) は満たしません．このとき，さらに何本かベクトルを追加することにより 2 次元完備非特異扇 Δ_3 が得られます．いわゆる特異点解消という操作です．Δ_3 は Δ_1 に有限本ベクトルを追加したものになっています．Δ_3 のベクトルたちの張る図形の凸性などを考えると，Δ_3 のベクトル v_i, v_{i+1}, v_{i+2} で，v_{i+1} は Δ_1 にあらわれず，$v_{i+1} = v_i + v_{i+2}$ が成立するようなものが取れます．上のようなベクトルたち

の存在は代数幾何学の知識があればほぼ明らかです．もちろん初等的にも証明可能です．このとき，Δ_3 から v_{i+1} を取り除きます．これは Δ_3 に爆発の逆を施したことになります．この操作を繰り返すと，結局，Δ_3 から有限回爆発の逆を繰り返して Δ_1 に到達することがわかります．同様に Δ_3 から有限回の爆発の逆で Δ_2 を得ることもできます．当然のことながら，この Δ_3 は定理 2.3 の主張するものになっています．ここで用いた爆発の逆は，代数曲面論の**カステルヌーヴォーの収縮定理**と呼ばれるものに対応しています．

3　扇とは？

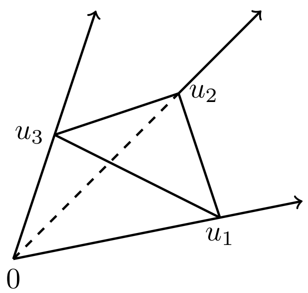
　すでに 2 次元の小田予想は詳しく見ましたが，一般次元の小田予想を説明するためにはいろいろな準備が必要です．ここでは小田予想に必要となる最低限の概念を説明したいと思います．詳しくは [11] などトーリック多様体を解説した本を見てください．以下，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ で考えます．$N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ を**格子**ということにします．

定義 3.1（錐）　有限個の N の元 $u_1, \ldots, u_s$ が存在して

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_s := \{a_1u_1 + \cdots + a_su_s \mid a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i\}$$

と書けるとき，σ を**錐 (cone)** ということにしましょう．ただし，$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ とします．

本稿では，我々は，$\{0\}$ 以外に $\mathbb{R}$ 部分空間を含まない錐 σ のみを考えることにしましょう．つまり，尖った錐のみを扱いましょう．別の言い方をすると，$\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ です．ここでの錐は正確には**有理強凸多面錐**と呼ばれるものです．もちろん 0 は $\mathbb{R}^n$ の原点を表しています．$\{0\}$ も錐であることに注意しましょう．3 次元だと以下の図のような感じです．



$\mathbb{R}^3$ の原点から無限に広がる尖った角錐を考える感じです．

定義 3.2（非特異錐） $\{u_1, \ldots, u_n\}$ が N の $\mathbb{Z}$ 基底，つまり，$N = \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_n$ で，

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_s$$

と書けるとき，σ を**非特異錐**と言います．ただし，$1 \leq s \leq n$ です．0 だけからなる錐 $\{0\}$ も非特異錐とします．

$N = \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_n$ という条件は，$\det(u_1 \cdots u_n) = \pm 1$ と言い換え可能であることを注意しておきます．次にトーリック多様体論では不可欠な扇の概念を導入します．

定義 3.3（扇） 錐の有限個の集合 Δ が以下をみたすとき，Δ を**扇 (fan)** と言いましょう．

(i) $\sigma \in \Delta$ なら σ のすべての面は Δ に属する．

(ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ なら，$\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面である．

さらに，Δ に属するすべての錐が非特異のとき，Δ は**非特異扇**と呼びましょう．

本稿では，我々は，非特異な錐しか扱いません．非特異錐を定義 3.2 のように

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_s$$

と書くと，σ の**面**とは

$$\mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_k}$$

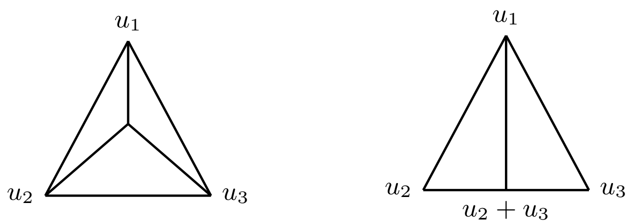
と書けるものたちのことです．ただし，$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, s\}$ です．また，$\{0\}$ も σ の面ということにします．さらに，我々は，$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$ なる扇のみを扱います．この条件が満たされるとき，扇は正確には**完備な扇**と呼ばれます．扇の定義はぱっと見ただけではわかりにくいかもしれませんが，3 次元の完備な非特異扇のイメージは，$\mathbb{R}^3$ を有限個の無限に広がる三角錐で綺麗にびっしり分割したものです．扇の定義は，二つの錐が重なったりずれたりすることなく，綺麗に空間を埋め尽くすように $\mathbb{R}^3$ に入っていると言っています．あるいは，3 次元の完備な非特異扇は球面の三角形分割を無限に広げた感じと言った方がいいかもしれません．

定義 3.4（爆発） Δ を完備で非特異な扇とする．

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_n$$

を Δ に含まれる錐の一つとする．σ にベクトル $u_{i_1} + \cdots + u_{i_k}$ を追加して σ を分割する．ただし，$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ で $k \geq 2$ とする．さらに，σ に隣接する錐もこれにともなって同様に分割する．このようにして新たに得られた扇を Δ' とかき，Δ' を Δ の爆発と呼ぶこととし，$\Delta' \to \Delta$ と書くこととする．

3 次元の場合は以下の図のように無限に広がる三角錐を分割する感じです．図は切り口をあらわしています．左の図で真ん中の点はベクトル $u_1+u_2+u_3$ に対応しています．



もちろん Δ' も完備な非特異扇になります．$n=3$ のときは，$u_1+u_2+u_3$，u_1+u_2，u_2+u_3，u_3+u_1 のいずれかのベクトルを追加して σ を分割することになります．$n=2$ のときは，前に説明した話そのものです．

4　小田予想とは？

やっと一般次元の小田予想を述べることができます．

予想 4.1（小田予想）　Δ_1 と Δ_2 を非特異で完備な扇とする．このとき，Δ_1 と Δ_2 に有限回の爆発を施すと，同じ非特異で完備な扇 Δ_3 に到達する．

小田予想がはじめて明確に述べられたのは [10, Section 9] だと思います．50 年弱未解決ということになります．おそらく，小田予想は正しいと信じている人の方が多数だと思いますが，絶対に正しいと信じるほどの根拠はないと思います (これはあくまで個人の見解です)．**弱小田予想**は解決済みです．つまり，適当に爆発とその逆を有限回繰り返すことにより，Δ_1 から Δ_2 まで到達可能です（[13] や [2] を参照）．**(強) 小田予想**（予想 4.1 のこと）は Δ_1 に有限回爆発を繰り返したあと，爆発の逆を有限回施せば Δ_2 になるはずだと主張しています．実は，小田予想は一度モレリによって解決が宣言されています（[9]）．JAG と略称される代数幾何学の有名雑誌に論文は掲載されましたが，証明には未だ修復不可能な穴があったようです．多くの人が [9] のアイデアの素晴らしさに目を奪われ，出版まで誰も証明のギャップに気付かなかったようです．この論文のアイデアはとても有用で，後に [3]，[2]，[14] を生み出しました．ちなみに，その後も何度か小田予想を解決したと主張するプレプリントが出回ったことがあるのですが，正式に出版まで辿り着いたものはありません．[5] では小田予想を解決しそうなアルゴリズムが提唱されていますが，アルゴリズムが有限で停止するかどうかが未解決のようです．いずれにせよ，小田予想は未解決のままです．

ここで少し話を変えましょう．小田予想は正しいとして，どのように解けるでしょうか？

(1) 初等的でない方法（代数幾何学の一般論など）を援用して，小田予想が主張するような上手い分割の存在が言える．
(2) 初等的な方法で上手い分割の存在を示す．つまり，たくさんの場合分けなどをして小田予想が必ず成立することを確認していく．
(3) 計算機を援用して小田予想に必要な分割は必ず実現できることを確認する．

などが考えられます．個人的には (1) が理想的であると思います．大変もうしわけないのですが，(2) は証明の細部の確認をする気が起きませんし，人間はほぼ必ず場合分けを見落とすので，証明できたと言われても当分の間スッキリ感はないままになると思われます（これもあくまで個人の見解です）．人はしばしば初等的な議論でミスを犯します（[9]）．以前（**4 色問題**や**ケプラー予想**の頃）は (3) のような方法は好ましくないと思われていたかもしれませんが，現在の計算機の発展状況などを考えると，(2) より (3) の方が信頼できるかも！？ と個人的には思います．

注意 4.2　少し個人的な意見を書いておきます．現役の代数幾何の研究者の偽らざる気持ちです．

- 小田予想は現在のところ比較的孤立した予想です．なので，小田予想が肯定的に解決されても否定的に解決されてもすぐに周りに大きな影響があるようには思えません．
- 代数幾何学の一般論を用いて初等的な分割の話に新たな知見を得ることができれば，それは素晴らしいことだと思います．この方向の話題は，例えば [6] にあります．爆発の逆を使うのではなく，**フリップ**と**因子収縮**と呼ばれる森理論のテクニックを使って分割を制御する話です．一方，代数幾何学の未解決問題を初等的な分割の問題に帰着し，頑張ってうまい分割の存在を示すことによって代数幾何学の定理を証明するという方向は，正直なところ，辛いです．証明が正しいのかどうか感覚的にしっくりこないからです．

5　代数幾何学との関係

ここでは代数幾何学との関係を説明したいと思います．**広中の特異点解消定理**，Mumford たちによる**半安定還元定理 (semistable reduction theorem)**，双有理写像の**弱分解定理 (weak factorization theorem)** を取り上げたいと思います．細かい用語の説明などは省略

します．非専門家の方は雰囲気を味わっていただけたらよいと思います．まずは特異点解消定理を見てみましょう．

定理 5.1（弱広中特異点解消定理） X を標数零の代数閉体上定義された射影代数多様体とする．このとき，$\widetilde{X} \to X$ なる非特異射影多様体からの双有理写像が存在する．この $\widetilde{X}$ を X の**特異点解消**と呼ぶ.

代数多様体は一般に特異点を持ちます．上の定理は，双有理写像で特異点のない代数多様体を作ることができると主張しています．これは高次元代数多様体論の出発点になる結果であり，研究に不可欠な定理です．元々の広中の特異点解消定理（[7]）は $\widetilde{X}$ の存在だけでなく，写像 $\widetilde{X} \to X$ について精密なことも主張しています．上の定理の一番簡単な証明は [12] だと思います．広中のオリジナルの論文 [7] は 200 ページを超える長大なもので，広中の電話帳と呼ばれていたようですが，論文 [12] は 10 ページほどの論文です．[12] は代数幾何学の基礎的な知識があれば読める内容になっています．巧妙な次元による帰納法を用い，問題をトーリック多様体 (正確にはトロイダル) の場合に帰着し，うまい分割の存在 (この分割の存在は簡単な話) を用いて証明しています．詳しくは [12] を見てください．ちなみに，現在では [7] よりも精密な結果を扱った読破可能な論文や本が多数出版されています.

定理 5.2（半安定還元定理） $f\colon X \to C$ を標数零の代数閉体上定義された代数多様体 X から非特異射影曲線 C への射影的な全射とする．このとき，底変換ののち有限回爆発を繰り返せば，**半安定退化**と呼ばれる状態にできる.

Mumford たち（[8]）はこの定理の証明のためにトーリック多様体 (正確にはトロイダル) の理論を構築しました．証明の最終的なステップではうまい分割の存在を示さなくてはいけません．これはとても大変です．残念ながら，多くの人は証明を読まないと思います．C を一般次元にした場合は**弱半安定還元**なる定理が知られています（[1]）．その定理の証明にも分割の話が必要ですが，そこで必要とされる分割の話はそれほど難しくないです．応用上はこの程度の結果で十分かもしれません．最近は C が一般次元でも半安定還元定理は証明されたようですが，結局のところ，「うまい分割が取れる」ことが示されたようです．詳しくは [4] を見てください.

定理 5.3（弱分解定理） X_1 と X_2 は標数零の代数閉体上定義された非特異射影多様体で X_1 と X_2 は双有理同値だとする．このとき，双有理写像 $X_1 \dashrightarrow X_2$ は中心が非特異である爆発かその逆の有限回の合成に分解できる.

この定理も長年未解決問題でした．おそらく問題として明確に述べられたのは，[10, Section 9]

が最初なのではないかと思います．**強分解予想**は，X_1 に有限回の爆発を施し，その後，有限回爆発の逆を施すと，X_2 に到達すると主張しています．この強分解予想は未解決のままです．もちろんこれのトーリック多様体版が小田予想に対応します．定理 5.3 は多かれ少なかれ弱小田予想の解決を用いて証明されています．詳しくは [2] や [14] を見てください．定理 5.3 は代数幾何学の研究の場ですでによく使われています．

注意 5.4　ここの注意は数学者向けだと思います．非特異射影多様体に何か双有理不変量を定義したいとしましょう．とりあえず非特異射影多様体を一つ持ってきて不変量を定義します．それが 1 回の爆発で不変であることが示されたら，弱分解定理を使うと well-defined な双有理不変量であることが言えたことになるわけです．このような応用の場合，弱分解定理で十分であり，強分解予想の解決は不要なわけです．なので，強分解予想の解決にエネルギーを注ぐ気があまり起きないのかもしれません．

6　おわりに

素朴な分割の問題が最先端の数学の研究の世界でしばしば重要な役割を果たすことがわかっていただけたでしょうか？ 本稿の読者の中から小田予想を解決する人が現れることを祈って筆を擱きたいと思います．個人的には，私が理解できる代数幾何学の手法を用いた証明を期待しています．最後に，講演の機会を下さいました大阪大学および日本数学会の皆さま，講演内容についてコメントと情報を下さいました皆さまに，深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] D. Abramovich, K. Karu, Weak semistable reduction in characteristic 0, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 241–273.

[2] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, Torification and factorization of birational maps, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 3, 531–572.

[3] D. Abramovich, K. Matsuki, S. Rashid, A note on the factorization theorem of toric birational maps after Morelli and its toroidal extension, Tohoku Math. J. (2) **51** (1999), no. 4, 489–537.

[4] K. Adiprasito, G. Liu, M. Temkin, Semistable reduction in characteristic 0, preprint (2018). arXiv:1810.03131 [math.AG]

[5] S. Da Silva, K. Karu, On Oda's strong factorization conjecture, Tohoku Math. J. (2) **63** (2011), no. 2, 163–182.

[6] 藤野修，トーリックの世界，平成 14 年度数学入門公開講座テキスト，京都大学数理解析研究所，2002 年.
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/H14-fujino.pdf`

[7] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203; 79 (1964), 205–326.

[8] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **339**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[9] R. Morelli, The birational geometry of toric varieties, J. Algebraic Geom. **5** (1996), no. 4, 751–782.

[10] T. Oda, *Torus embeddings and applications. Based on joint work with Katsuya Miyake*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, **57**. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[11] 小田忠雄，凸体と代数幾何学，紀伊國屋数学叢書 **24**, 1985.

[12] K. H. Paranjape, The Bogomolov–Pantev resolution, an expository account, *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 347–358, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **264**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[13] J. Włodarczyk, Decomposition of birational toric maps in blow-ups & blow-downs, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 1, 373–411.

[14] J. Włodarczyk, Toroidal varieties and the weak factorization theorem, Invent. Math. **154** (2003), no. 2, 223–331.