山下真由子さんの令和６年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞に寄せて

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構
立川　裕二

山下真由子さんが『代数トポロジーと量子場の理論の研究』に関して今年度の文部科学大臣表彰若手科学者賞を受賞なさったことに関して，物理側の共同研究者の一人である私から一言コメントを，というお声掛けを『数学通信』の皆様からいただいた．私自身が数学者でないため，山下さんの業績がこれまでの数学の流れの中でどう位置づけされ，どのような発展をもたらしたのか，ということについては申し訳ないながら解説することが出来ない．しかし，このような機会をいただいたのであるから，山下さんの仕事がどのように我々理論物理学者にとって有り難いのかということを皆さんにわかっていただくことは出来るのではないかと思って，この記事の執筆をお引き受けした次第である．また，山下さんは他にもいくつかの賞を受賞しており，複数の受賞記事がこの『数学通信』誌に掲載されているので，説明が重複してしまいがちであるが，なるべく異なる方面からの解説を心がけたいと思う．

『場』とは，光の別名である電磁場をはじめ，時間空間に広がった物理的モノのことである．これを量子力学的に研究するのが量子場の理論である．日本語訳には場の量子論，量子場の理論，場の理論，など複数あるが，以下簡単のため単に『場の理論』と呼ぶことにする．また，歴史的経緯で用語法がややこしく，『群』『多様体』に相当するものが『場の理論』であり，『群論』『多様体論』に相当するものは『場の理論の理論』であるはずなのだが，後者も『場の理論』と呼ぶのが慣習である．

さて，場の理論には百年近い歴史があり，実験的結果もよく再現する．しかし，全般的な純粋数学的取り扱いが非常に困難であり，万人の納得する数学的枠組みは未だ無く，種々の部分的側面が定式化されているに留まる．考察する側面に応じて，必要になる数学的分野は異なるが，長らく代数トポロジーはそれほど目立った使われ方をしていなかった．

水など身近な物質が気相，液相，固相の三種の相を示すのは読者もご存知だろう．また，磁石を熱するとある温度以上で磁性が失われるのをご存知の方もいるだろう．巨視的な磁石は微細な磁石多数で出来ており，低温だとそれら微細な磁石が整列する秩序があって巨視的な磁性を示すが，高温では乱雑になり巨視的な磁性を失う．そこで低温相を秩序相，高温相を乱雑相という．より一般に，物質の性質を場の理論で記述したとすると，物質の取りうる相を研究するというのは，考えたい場の理論のクラスを決めた上で，それらの分類

空間の連結成分 π_0 を同定する問題だと思える．連結成分を完全に同定しないまでも，異なる連結成分を区別するような不変量を構成することを考えても良い．

磁性のばあいなどに適用可能な前世紀半ばには存在していた古くからの手法があるのでまずはそれを数学的に説明してみよう．系の中のある場 ϕ に群 G が作用しており，状態もしくは相がその期待値 $\langle\phi\rangle$ で指定されるとする．この値のことを秩序変数というが，それぞれの相における $\langle\phi\rangle$ を固定する G の部分群の G 共役類を連結成分に対する不変量として用いようというものである．この方法は提唱者にちなんでランダウ・パラダイムと呼ばれるが，手法にのっとって対称性の破れの解析という名前でも知られている．物理では，系の対称性 G が，秩序変数 $\langle\phi\rangle$ の固定部分群に破れる，という言い方をする．

勿論すべての相がこれで分類できるわけではなく，より微妙な考察を必要とする相が存在することは長らく知られている．これらの相の分類に代数トポロジーが有用であろうというのは 15 年ほど前から明らかになってきた．まず，トポロジカル絶縁体およびトポロジカル超伝導体と呼ばれるクラスの系のとりうる相がそれぞれ複素 K 理論および実 K 理論で分類されるということがわかってきた．これら分類が可能であった系には，1. 長距離相関を持たず，かつ，2. 励起をつくるのに系のサイズに寄らないノンゼロの最小エネルギーが必要であるという共通の性質がある．では，1. と 2. の性質を持ち，かつ，対称性 G をもつような相を分類することは出来るだろうか．これが G-symmetry protected topological phase (G-SPT 相) の分類問題といって，2010 年を過ぎたあたりから物性理論のなかで大きく取り上げられた問題である．

いろいろな部分的結果が非厳密な物理的考察から得られ，沢山の論文が書かれたが，徐々に，分類結果は K 理論に関連するような何らかの一般コホモロジー理論で得られるだろうという共通認識が得られた．これは後に理論素粒子物理を経由して純粋数学側で取り上げられ，数学者 Freed と Hopkins によって 2016 年に空間 d 次元時間 1 次元の G-SPT 相でフェルミオンを含むものの分類結果は $(I_{\mathbb{Z}}\mathrm{MSpin})^{d+2}(BG)$ という一般コホモロジーで与えられるという提唱がなされた．ここで MSpin はスピン同境ホモロジーもしくは対応するトム・スペクトラムで，スペクトラム E に対して $I_{\mathbb{Z}}E$ は常ホモロジーと常コホモロジーの間の普遍係数定理を一般 (コ) ホモロジーに拡張するために必要になる双対操作でアンダーソン双対と呼ばれ，BG は G の分類空間である．この Freed と Hopkins の主張はユークリッド的で反転正値かつ可逆な場の理論の彼らの数学的に厳密な定式化による考察に基づいてはいるが数学的には厳密な証明ではなく予想に留まるものではある．しかし，理論物理屋の間ではその他の状況証拠からも非常に確からしいと思われている．

この問題をさらに数学的に追究するには色々な方法が考えられる．ひとつは，物性系を統計力学系として作用素環を用いて厳密に数学的に研究することには長い歴史があるので，その枠組みでこれらの相を定式化し，分類を証明しようという方向性である．このプログ

ラムを次々と遂行なさっているのが緒方芳子さんで，その業績に対してごく最近猿橋賞が授与されたのは記憶にあたらしい．緒方さんがポアンカレ賞を受賞なさったときの記事も『数学通信』の第 26 巻第 4 号にあるのでそちらをご覧になると良いと思う．

もうひとつの方法は，Freed と Hopkins の立場に近く，系を可逆で反転正値な場の理論として考えることにし，それを数学的に厳密に扱うという方法である．こちらの研究を力強く推し進めているのが山下さんである．例えば，理論物理学者の米倉和也さんとの共著からはじまる一連の論文で，山下さんは，理論物理における可逆相の議論を厳密化することにより，同境ホモロジーのアンダーソン双対およびその微分一般コホモロジー化のモデルを構成した．また，数学者の五味清紀さんとの共著論文で，山下さんは微分 KO 理論の新たなモデルを構成したのだが，これはトポロジカル超伝導体の理論物理における解析を動機としており，スピン同境ホモロジーのアンダーソン双対との関連も自然に示唆されるような構成になっている．

以上の論文の概要からもおわかりだろうと思うが，山下さんは，純粋数学者としてのトレーニングを受けたはずながら，不思議に我々理論物理屋の言うことを判ってくださる．私の所属する研究所には，幸い数学者と物理屋の双方が多数所属するので，代数トポロジーが必要になりはじめたころから色々と同僚の数学者に質問をしてはいたものの，まずはこちらの意図を理解してもらうことが困難で，また，数学的問いが何とか伝わったとしても，それを解決したい動機が伝わらなければ真剣に考えては貰えないわけである．というわけで，代数トポロジーを必要とする私の研究は遅々として進んでいなかった．その状況が 2021 年に山下さんに巡り合ったことで有り難いことに大きく変化したのである．

もうすこし具体的な話を書く．代数トポロジーにおいては，ホモロジー，K 理論のつぎに自然に位相的モジュラー形式 (topological modular form, TMF) と呼ばれる一般ホモロジー理論があらわれるそうである．TMF には代数トポロジー的な定義はあるのであるが，もっと外在的に，『TMF の分類空間は二次元最小超対称場の理論の分類空間と一致するであろう』という Stolz と Teichner による予想と呼ぶべきか提唱と呼ぶべきか微妙なものがある．微妙であるのは，場の理論の定義自体が確定しておらず，それを確定させたうえで，さらにそれらの族にトポロジーをいれて，云々，という考察をする必要があるからである．Stolz と Teichner 自身は，自分たちの提唱を数学的な予想にすべく，場の理論に対して暫定的な定義を与えているのではあるが，その定義が『正しい』ものであるか必ずしも明らかではない．しかし，物理的に『正しい』定義を用いると，Stolz と Teichner の提唱は結局正しくなるであろう，と期待されており，それを示唆する非自明な状況証拠も沢山ある，というのが現状だと言ってよいと思う．

さて，私はコロナ禍のすこしまえ頃から，d 次元のヘテロティック弦理論における量子異常の相殺について考えていた．Stolz-Teichner の提唱を仮定すれば，d 次元のヘテロティッ

ク弦理論は元 $T \in \mathrm{TMF}^{22+d}(X)$ によって指定される．また，その量子異常は，数学的には何かコホモロジー作用素 $\alpha_{\mathrm{spin}} : \mathrm{TMF}^{22+d}(X) \to I_{\mathbb{Z}}\mathrm{MSpin}^{2+d}(X)$ があって $\alpha_{\mathrm{spin}}(T)$ によって記述されることになる．この量子異常が相殺するというのは，さらにそれを標準的な変換 $I_{\mathbb{Z}}\iota : I_{\mathbb{Z}}\mathrm{MSpin}^{2+d}(X) \to I_{\mathbb{Z}}\mathrm{MString}^{2+d}(X)$ によってストリング同境ホモロジーのアンダーソン双対に送ると $I_{\mathbb{Z}}\iota \circ \alpha_{\mathrm{spin}}(T) = 0$ となるということである．

理論物理側からは，特定の d, X, T に対してこれを調べたくなる動機があり，私の技量ではもっとも簡単な $d = 2$, $X = \mathrm{pt}$ で T が一般の場合に示すのが限界だった．そんな中，2021 年早春のオンライン研究会に参加した所，山下さんが関連しそうな話をしているのを見かけたので，数日逡巡した後に電子メールで相談をしてみたところ，興味をもってくださったのでしばらくメールのやりとりをした．すると，一ヶ月ほどの間に，上記コホモロジー作用素 α_{spin} の厳密な定義をしてくださった．そうこうしていると，なんと特定の物理的動機のある d, X, T に対してだけではなく，勝手な d, X, T に対して $I_{\mathbb{Z}}\iota \circ \alpha_{\mathrm{spin}}(T) = 0$ であることが証明されてしまったのである．

これには私はびっくりしてしまった．そもそも，理論物理屋の癖として，特定の例について計算することに気を取られていたので，全ての場合に消えることが示せるなどとは思ってもいなかった．これは，考えている対象を素直に扱いうる中でなるべく一般的な設定を使うと，個別の問題を扱うより考察がむしろ簡単化することがある，という，数学の特徴を良く示しているのだと思う．しかし，そこに至るまでには，理論物理屋である私のいい加減な説明を理解して，証明すべき厳密な数学の主張を取り出さないといけない．

私は過去の二十年ほどの理論物理屋としての研究の過程で，理論物理から生じた数学的問題に関して，幸いなことに複数の数学者に考えていただいたことがある．しかし，これまでは，まず問題を理解して定式化していただくのに数年かかり，さらにそれを証明していただくのにさらに数年かかる，というのが典型的なタイムスケールだった．そうすると，証明ができた頃には，移り気な私の興味は別の問題にあることが多く，証明ができたこと自体が私の研究に影響を与えるわけではなかった．

それが，上記の研究からはじまる私と山下さんとの共同研究の場合は，数ヶ月の単位で進む．これは理論物理屋としての私の研究のタイムスケールと同程度であり，山下さんが定式化して証明してくださる結果が，私の理論物理における考察にリアルタイムで影響を与えてくれるのである．これは私にとってはじめての経験だった．

今後も山下さんは私に限らずいろいろな理論物理屋の研究を助けてくださるだろうと思う．山下さん，ご受賞おめでとうございます．今後とも宜しくお願いいたします．