# 佐伯修氏の文部科学大臣表彰科学技術賞受賞に寄せて

近畿大学理工学部
佐久間　一浩

九州大学大学院マス・フォア・インダストリ研究所教授の佐伯修氏が令和 6 年度の科学技術分野における標記の受賞をされました．業績名は「可微分写像の大域的特異点論の研究」であります．日本数学会としても大変喜ばしいことで，佐伯氏には心からお祝い申し上げます．

その業績を大まかに振り返ると，1987 年に出版された第一論文（代数的三次元結び目）に始まり，2024 年の 130 編目の論文まで，誠に多彩な分野における研究業績を積み重ねられている．そこにこの度の受賞理由の一つがあると推察される．実年齢の二倍以上の出版された論文をお持ちである数学者は稀であると同時に精力的な研究能力と卓抜したアイデアには誠に驚かされる．佐伯氏のホームページの「研究活動」によると，実に 7 つの研究テーマに跨って研究をされている．

「可微分写像の大域的特異点論」について，ここで簡単に触れておこう．以下の概説は主に $C^\infty$ 級カテゴリーでの話なので，これを逐一断らずに議論を進める．大事なキーワードは「大域的」という用語に内在する．本来，多様体間の写像の特異点とは，写像の微分の階数が落ちる点のことであり，そもそも局所的概念である．しかし，ひとたび多様体上での写像の特異点の振る舞いを考えると，そこに多様体がもつ大域的な位相構造や微分構造の違いが明確に反映されるのである．つまり，多様体の大域的構造がその上の写像をうまく選ぶと，特異点の型や並びに顕著に表れるのである．多様体を分類するという立場で見ると，写像に現れる特異点の情報から分類に着手するのは，多様体論における誠に真っ当な方法論の一つであると言えよう．

1950 年代半ばに，H. Whitney と R. Thom というトポロジーにおける二大巨頭がそれぞれ写像の特異点論の研究の方向性を決定づける論文を著わし（[1, 2]），多様体間の ‘良い’ 写像として「安定写像」の概念に至る．特に，Thom は [1] “微分可能写像の特異点” の冒頭で，「モース理論の一般化」を提唱し，写像の特異点型に対して，その特異点集合の（位相的閉包の）ポアンカレ双対が特性類の多項式で表される「Thom 多項式」の概念を発見し，関数の場合の Morse 不等式の一般化として位置づけた．写像 $f : M \to N$ が与えられたとき，Thom 多項式の表示は多様体 $M$, $N$ や写像 $f$ の選び方には依らずに普遍的であることが特徴である．この特異点型の Thom 多項式は，写像からその特異点を消去するための（ホモトピー論の意味での）primary obstruction の役割を果たしているのが特筆すべき事柄である．モース関数から多様体のハンドル分解が得られるように，安定写像からは多様体の滑

層分割 (stratification) の様子がわかる．そこで問題となるのがより複雑な特異点型に対応する strata がどこまで消せるか，である．そのための足がかりとなるのが，第一義的には特異点の Thom 多項式が消えているか否かである．

佐伯氏の「可微分写像の大域的特異点論」における最初の業績は第 10 論文 (J. Math. Soc. Japan, 1992) である．1980 年代までにこの分野で分かっていた結果を簡明に論じるために，値域をユークリッド空間の場合に限定する，すなわち $M^n$ を $n$ 次元閉多様体とし，その上の安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$（ただし，$n \geq p$ の場合）に焦点を当てる．Thom はモース理論の一般化の先駆けとして，[1] において安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ に現れる特異点型は折り目とカスプに限ることを決定し，カスプの Thom 多項式が $w_n \in H^n(M^n; \mathbb{Z}_2)$ であることを示した．8 年後に H. Levine は Thom の成果の逆，すなわち $w_n = 0$ ならばカスプ特異点を必ず対で消せることを証明した．したがって，カスプ特異点消去の唯一の障害は，その Thom 多項式だということになる．そこで，$p \geq 3$ の場合に安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ の考察が問題となるが，特異点の Thom 多項式以外の障害の存在は 1990 年頃まで知られていなかったのである．

第 10 論文において，佐伯氏は向き付け可能な 4 次元閉多様体 $M^4$ に対して，安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を考察する．Thom のジェット横断性定理から現れる特異点型は折り目，カスプと燕の尾に限ることがわかり，（偶数個の）離散点で現れる燕の尾特異点は，1980 年代に安藤良文氏によって消去可能であることが知られていた．一方，カスプの Thom 多項式は恒等的に消えているので，消去可能か否かはわからない．佐伯氏は特異点集合（$M^4$ の 2 次元部分多様体）の自己交叉数を詳しく調べて，$M^4$ が複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ と同型のコホモロジー群を有する場合にカスプ特異点が消去不可能であることを証明した．すなわち，Thom 多項式以外の障害があるという最初の発見であり，まさに大域的特異点論の画期的成果の一つである．後にこの結果は，第 68 論文（Comment. Math. Helv., 2003）において，カスプを消せるための必要十分条件が，ある $x \in H^2(M^4; \mathbb{Z})$ が存在して $x^2 = p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z})$ を満たすこと，という形に昇華された．これにより，特に第 2 ベッチ数が $b_2(M^2) = 1, 2$ のときに限って，例えば $M^4 = \mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ ならば，安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点が消去できないことが従う．

少し余談に触れておこう．1970 年代初頭，ロシアの Y. Eliashberg は彼自身の初期の仕事として，上で論じたようなカスプ特異点を持たない写像（これを折り目写像という）$f: M^n \to N^p$ の存在のためのホモトピー原理を 1-jet level で完全に確立した．2000 年頃に来日したときには，symplectic 幾何学の世界的権威だったが，ちょうど Mishachev と共著で “Introduction to the $h$-principle”(Grad. Studies in Math., vol. 48) を書いている頃で，京大数理研の研究集会で折り目写像のホモトピー原理について講演をしてもらった．講演を離れた雑談の折に，$M^4 = \mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ の場合には，ホモトピー原理は成り立たず，

カスプ特異点は消せないという佐伯氏の結果に，深くため息をついて “That’s amazing!” と言っていたと聞いて，カスプ特異点消去不可能性定理の意義深さをつくづく再確認した，という思い出が懐かしい．

さて, 佐伯氏は第 11 論文（Topology Appl., 1993）において, **特殊生成写像**（special generic map）$f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在するための必要十分条件として，$M^n$ の滑層分割の構成を完全に与えた．これには若干の説明が要るだろう．有名な Milnor の 7 次元エキゾチック球面の発見の論文において，Milnor-Reeb の定理として知られるモース理論の基本定理がある．特異点の個数が最小（二個！）のモース関数 $f : M^n \to \mathbb{R}$ が存在するならば，$M^n$ は球面 $S^n$ に同相であるという主張である．このようなモース関数の写像版の一つの定義が特殊生成写像である．すなわち写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ に現れる特異点が定値折り目特異点のみであるときをいう．定値折り目特異点とは，その局所的対応が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, \pm(x_p^2 + \cdots + x_n^2))$$

であるときのことである．上記論文において，佐伯氏は特殊生成写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件として，$M^n$ の微分同相分類を与えた．実は値域が 2 次元の場合は，特殊生成写像が存在するというのが強い条件のため，$M^n$ の基本群が自由群であるという制限が生じる．

$p = 3$ の場合には許容し得る基本群が広がる．特に，$(n, p) = (4, 3)$ において，$M^4$ と $N^4$ が同相であるとき，$M^4$ は $\mathbb{R}^3$ への特殊生成写像を許容するが，$N^4$ 上での $\mathbb{R}^3$ への安定写像の不定値折り目特異点は消去不可能であるという場合があることを第 39 論文（Pacific J. Math., 1998）と第 47 論文（Math. Ann., 1999）で与えた．これは安定写像の不定値折り目特異点の障害が 4 次元多様体の微分構造の違いにあることを如実に物語っている．さらに付け加えると，第 47 論文において，複素解析的曲面に微分同相な 4 次元多様体が所望の写像を許容するときの微分同相分類が与えられている．それにより，複素解析的曲面の小平次元が $-\infty$ であることが従う．一方，$S^2 \times S^2$ の連結和の上には特殊生成写像が簡単に構成できるが，一般型曲面（小平次元が 2）である Moishezon-Teicher 曲面 $X^4$ は十分大きい個数の $S^2 \times S^2$ の連結和に同相であるが $X^4$ 上の写像の不定値折り目特異点の消去は，小平次元の違いゆえに不可能であることが従う．

カスプ特異点消去の別の障害も見つかっている．第 17 論文（Proc. AMS,1995）において，オイラー標数が奇数の多様体 $M^n$ について，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在するならば，$p = 1, 3, 7$ でなければならないことを証明し，第 38 論文（Math. Proc. Camb., 1998）において，値域次元のこの制限が Hopf 不変量 1 の元の（非）存在定理（J. F. Adams による）に起因することが明らかにされた．オイラー標数が奇数ということと Hopf 不変量 1 が結びついた結果である．単に Thom 多項式という障害類から導出される結果ではなく，こ

れは同時にジェネリックな写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ のカスプ特異点を消去するための障害が Hopf 不変量 1 の元の問題と同値な内容,「多元体の存在問題」,「球面の平行化可能性問題」,「球面上の概複素構造の存在問題」などと密接に結びついていることをも示唆している.

さて, 第 77 論文 (Springer Lecture Notes, vol. 1854, 2004) において, 安定写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4)$ の特異ファイバーの分類を行った. またそれだけではなく, そもそも安定写像全体というのは写像空間の中で, 開かつ稠密に存在するので, 本来非常に多く存在するが, 具体的に安定写像を構成するのは多様体論的に大変難しい. しかし, 佐伯氏は本書において特異値の絵を描写することにより, 基本的な多様体についての安定写像の存在を視覚化した. さらに特筆すべきは, $n = 3, 4$ の場合で特異ファイバーの分類結果に基づいて, 3 次元有向コボルディズム群が自明, i.e., $\Omega_3 = 0$, であることの別証明を与え（結果は自明群だが証明は本来幾何学的に大変難しい), 4 次元では写像のコボルディズム分類を遂行し, 山本卓宏氏との共同研究, 第 84 論文（Geometry & Topology, 2006）では特異ファイバーに符号を定め, 特に Borromean ring 形状の特異ファイバーの符号の総和が 4 次元閉多様体の符号数に一致する, という全く新しい形の符号数公式の証明に至る. まだまだ触れたい佐伯氏の仕事（例えば Lefschetz 束に関する一連の論文等）は山ほどあるが紙数も尽きてきてしまった.

佐伯修氏の業績全体を俯瞰する解説は, 筆者の能力を遥かに超える仕事となるので, 佐伯氏自身による数学会論説である第 31 論文（1996）および第 91 論文（2008）を参照いただきたい. 控えめな性格を反映した言葉であるが, 上記論説の結びで「まだまだ Thom の当初のアイデアが実現されているとは言えないように思われてくる.」と附言している. しかしながら, ここでダイジェストで眺めただけでも, 特異点消去の障害が様々な数学の基本問題と結び付く様は, そうした枠組みとの密接な繋がりを見出すだけで, 幾何学を超えた魅惑の世界を明らかにしてくれたという意味で大変意義深いことは言うまでもない. そもそも新しい数学の枠組みそのものを追及するという Thom という数学者が最も得意とする仕事に鑑み, [1] において始められた Thom の目論見をすでに超えている, と思うのは筆者だけであろうか.

## 参考文献


[1] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955-56), 43–87.

[2] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62**(1955), 374–410.