小関健太氏の Hall Medal 受賞の紹介

慶應義塾大学理工学部
太田　克弘

横浜国立大学の小関健太氏に，2023 Hall Medal が授与された．Hall Medals は，ICA (The Institute of Combinatorics and its Applications) によって，中堅研究者による極めて質が高くかつ国際的に大きな影響力を持つ研究を表彰するものである．

小関健太氏は，グラフ理論，特にグラフの部分構造や位相幾何学的性質を議論する研究において，深い貢献がある．非常に数多くの重要な結果を得ており，その中には長く未解決であった問題や予想を解決したものも含まれる．彼の見事な洞察は，これまで多くの人により研究されてきたテーマにおいて新しい発見を導いてきた．例えば，Fisk による興味深い結果で「3 正則平面的 2 部グラフの 3 辺彩色は互いに Kempe 同値である」という定理を受け，Mohar は「3 辺彩色の Kempe 同値類がただ一つであるような 3 正則 2 部グラフの特徴付けを与えよ」という問題を提示した．多くの研究者がこの問題を極めて難しいものと捉えていたのに対し，小関氏は射影平面的グラフに対してこの問題を解決しブレークスルーを与えた．また彼は「4-連結射影平面的グラフはハミルトン連結[1]であろう」という Dean による予想を証明したが，これは，4-連結平面的グラフはハミルトン連結である，という Thomassen の定理と，4-連結射影平面的グラフはハミルトニアン[2]である，という Thomas と Yu による定理を共通に拡張したものとなってる．

小関健太氏は，2009 年に慶應義塾大学で博士の学位を取得し，その後，国立情報学研究所での特別研究員を経て，2017 年に横浜国立大学に着任している．2006 年[3]以降，すでに 105 本の論文が出版されている（発表時点）．40 歳にして学術誌 Graphs and Combinatorics の副編集長を務めていることからも，小関氏がグラフ理論においていかに深く幅広い知識を有しているかがわかるであろう．

— 以上，プレスリリース（2024 年 6 月 4 日）より[4]

組合せ論の国際的な機関である ICA[5]は，その主要な活動の一つとして，毎年 4 種類のメダルを授与しています．そのうち Hall Medal は，上にも書いてある通り，中堅の研究者

[1]任意の 2 頂点間にハミルトンパスが存在する，という性質．
[2]ハミルトン閉路を持つ，という意味．
[3]MathSciNet によると，最初の論文は 2007 年．
[4]太田が日本語に訳しました．
[5]ICA の詳細については，ICA のウェブページ `http://www.the-ica.org/` または，原田昌晃氏が 2005 年に受賞した際の『数学通信』の記事（第 10 巻第 2 号）を参照されたい．

（これは正確には，今回で言うと2005年以降に学位を取得した者を指します）が対象となるもので，毎年最大2名に授与されます．言わば，乗りに乗った研究活動をしている研究者の中から際立った研究業績を挙げている人に授与される賞です．日本からの受賞者は，2005年の原田昌晃氏以来の2人目となります．ここでは，小関健太氏の業績や人となりについて少し補足して説明させていただきます．

小関健太氏は，学部4年から博士課程を短期で修了するまでの5年間 (2004–2009)，慶應義塾大学の私の研究室に在籍していました．慶應の一貫教育校出身ですので，長年慶應に在籍していたことになります．高校から大学にかけては将棋研究会で活躍していて，かなりの実力だったと聞いています．学位取得後，国立情報学研究所や横浜国立大学に所属している現在に至るまで，比較的頻繁に慶應義塾大学を訪問してくれています．慶應で定期的に開催しているセミナーにも参加し，頻繁に講演してくれています．

研究内容に移ります．小関氏の研究はグラフ理論の極めて多岐にわたり，論文数も100を優に超えています．その中にはサーベイ論文も4編含まれていて，それぞれのテーマで広く深い知識を有していることがわかります．そのような小関氏ですが，研究を始めた当初から，その研究の中心にハミルトン閉路があったようです．ハミルトン閉路とは，与えられたグラフにおいてすべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路のことです．ハミルトン閉路に関する研究は，グラフ理論の研究が盛んになってきた約80年前から現在に至るまで，常にグラフ理論の中心的な研究テーマの一つです．長年未解決で残されている問題も多くあります．その中で新しい研究成果を得ることの難しさは，想像に難くないと思います．

どのようなグラフにハミルトン閉路が存在するかという問題において，意味のある必要十分条件を与えることは，計算量理論の観点からも極めて難しいとされます．適用範囲がより広くなる十分条件を追及する，というのが中心的な研究テーマとなりますが，多くの研究では，次数条件などを課すことによって，辺の数のかなり多いグラフを対象とします．（小関氏もそのような研究成果を多数持っていますが）それとは対照的に，グラフに位相幾何学的性質を課すことによって，少ない辺数ながらもハミルトン閉路の存在を保証しようというものがあります．このような研究の発端は，Tutte (1956) による「任意の4-連結平面的グラフはハミルトン閉路を持つ」という定理となります．Tutteの定理の拡張としては，プレスリリースにあるThomassenの定理 (1983) と，ThomasとYuによる定理 (1997) が大きな定理として知られていましたが，その共通の拡張となる定理，すなわち，4-連結射影平面的グラフはハミルトン連結である，という定理を小関氏らは証明しました (Kawarabayashi–Ozeki 2015)．「共通の拡張」と一言でいうと，議論を混ぜ合わせれば良いのではないか，と思われるかもしれませんが，この場合，ワンランク難しいところで議論を展開し収束させないといけない状況で，そのハードルはかなり大きかったはずです．

これと同じように，ハミルトン性をワンランク強い性質にアップさせる研究成果として，

小関氏は次のような研究成果も挙げています．平面グラフのハミルトン連結性を一歩推し進めた結果として，「4-連結平面的グラフにどのように 2 辺加えても，それら 2 辺を通るハミルトン閉路が存在する」という定理 (Ozeki–Vrána 2014)，トーラス上の 5-連結グラフがハミルトニアンであるという結果を強めて，そのようなグラフがハミルトン連結であるという定理 (Kawarabayashi–Ozeki 2016) などがあります．

これらの定理が，平面や射影平面，トーラスといった種数の低い閉曲面のみで考えられているのは，ハミルトン性がグラフに要求する性質が深く関係していて，小関氏が得てきた結果は，様々な意味において最善の結果となっています．また小関氏の研究の中には，そのような位相幾何学的性質を「禁止マイナー」と呼ばれる完全に組合せ的な性質に置き換えて拡張した定理などもあります．

もう一つプレスリリースで言及されている定理にも触れておきましょう．それは 3 正則グラフの 3 辺彩色に関するものです．3 正則平面グラフにおいては，その 3 辺彩色は双対グラフの 4 頂点彩色に対応し，四色定理と密接に関連する概念として知られています．3 辺彩色された 3 正則グラフにおいて，3 色のうちの 2 色に着目すると，それらの色の辺たちはいくつかの閉路を構成しています．そのうちの一つの閉路を選び閉路上の 2 色を交換する操作を Kempe スイッチと呼び，Kempe スイッチの繰り返しで得られる 3 辺彩色同士は Kempe 同値である，と言われます．Fisk (1973) は，「3 正則平面的 2 部グラフの 3 辺彩色は互いに Kempe 同値である」という定理を示しました．これに対し小関氏は，3 正則射影平面的 2 部グラフのすべての 3 辺彩色が互いに Kempe 同値になるための必要十分条件を，その双対グラフの頂点彩色の言葉で述べることに成功しています (Ozeki 2022)．この定理は，Mohar が 2006 年に提示した問題への一つの答えを与えているとともに，リスト辺彩色の深い予想とも関連し，非常に興味深い定理となっています．

小関氏の業績は，100 本を超えるその論文数からも容易に想像できる通り，ここに述べられている以外も非常に多岐にわたります．小関氏は幅広い研究に深く関心をもち，その結果として，国内外の多くの研究者と共同研究を行っています．その研究レベルの高さについても，以前より国際的に認められており，国外からも招待講演を多数依頼されています．それがこのような形で評価されたことは，非常に喜ばしく思います．