桑垣樹氏の令和６年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科
植田　一石

桑垣樹さんが「超局所層理論による幾何学と代数解析学の研究」によって令和 6 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞を受賞されました．彼が大学院生だった時の指導教員の一人（初めは細野忍さんが指導されていたのですが，細野さんの転出に伴って，修士二年からは私が指導教員を務めました）として，心から嬉しく思っています．

修士課程一年の時には，まず Cox–Little–Schenck の教科書でトーリック幾何を学ばれ，次に Ballard–Favero–Katzarkov の Variation of geometric invariant theory quotients and derived categories, J. Reine Angew. Math. 746 (2019), 235–303 を読まれた後に, Fang–Liu–Treumann–Zaslow の A categorification of Morelli's theorem, Invent. Math. 186 (2011), no.1, 79–114 を読まれて，そこ（より正確には，この論文のプレプリント版から分離した論文）で提出された連接/構成可能対応予想に興味を持たれました．これは 2006 年に Bondal が Oberwolfach で行った講演に端を発する予想で，任意のコンパクトな n 次元複素トーリック多様体 X に対して，X 上の連接層の導来圏が，マイクロ台に X から決まる条件を付けた実 n 次元トーラス上の構成可能層の導来圏と同値になる事を主張します．

連接層は多変数関数論に関する岡の理論と，それを受けた Henri Cartan の仕事によってまず複素多様体に対して確立され，それを Serre が代数化した概念であり，局所的には正則関数環上の加群になっていて，適当な有限性を持つようなものを指します．一方，構成可能層はある種の特異性を許容するような局所系（基本群の表現）の一般化です．層は局所的なものが貼り合わさって大域的なものができているような状況を記述する便利な言葉を提供します．その際の局所と大域のずれを測るのが層のコホモロジーで，層に付随して定まる適当な複体のコホモロジーとして定義されます．しかし，一般に複体に対してそのコホモロジーを取ると情報が失われるので，それを回復するためにスペクトル系列のような複雑な仕組みが開発されました．導来圏はコホモロジーを取らずに複体を複体のまま扱うことで情報が失われることを防ぐための枠組みで，複体の圏を適当に局所化することによって定義されます．

連接層と構成可能層はどちらも適当な有限性を持つ層なのですが，例えば Stein 多様体上の連接層の高次のコホモロジーは Cartan の定理 B によって常に消える一方，構成可能層の高次のコホモロジーは Stein 多様体上でも普通は消えないなど，その性質は大きく異なります．連接/構成可能対応予想は，コンパクトなトーリック多様体という非常に特別なクラス

の代数多様体の連接層の導来圏が，同じ次元の実トーラス上の構成可能層の導来圏と同値になるという一見不思議な予想です．この同値は導来圏の同値であって，導来圏を取る前の Abel 圏は一般には同値になりません．この連接/構成可能対応によって，例えば一点の次に簡単なコンパクトトーリック多様体である射影直線上の連接層の導来圏は，円周 S^1 の一点と開区間への分解に沿って定数であるような構成可能層の導来圏と同値になります．

桑垣さんの最初の仕事は，トーリック多様体の点を中心とした爆発に対してこの連接/構成可能対応予想がどう振る舞うかを調べるものでした．その系として，トーリック曲面に対しては連接/構成可能対応予想が正しいことが従います．これは私の専門であるホモロジー的ミラー対称性とかなり近い話題ですが，桑垣さんがこの結果を得たのは細野さんが指導されていた修士課程 1 年の時のことであって，私は一切関わっていません．細野さんの専門はこの話題からは遠いので，大学院生は数学を教員から教わるのではなく，教員に教えるべきであるという理想（これは数学の健全な発展や多様性の確保のために重要で，大学院生が指導教員の縮小版コピーになることは絶対に避けなければいけません）が実現されていたことが分かります．これは，指導教員がより専門の近い私に変わった後も変わりませんでした．

このように桑垣さんは，連接層の導来圏や構成可能層とそのマイクロ台などに関する研究レベルの知識を身に着けて，その分野の新しくかつ重要な未解決問題を探し，部分的に解決する（その結果は後に Journal of Differential Geometry 誌から出版されました）という，博士の学位に値することを，修士課程 1 年の時点で達成しました．このように，指導教員が私に変わった時点で桑垣さんは既に自立した研究者だったので，私との関係も，大学院生とその指導教員と言うよりは，ポスドクとメンターの関係に近いものでした．もちろん博士論文は書かなければなりませんが，必要があればいつでも書けるだろうと思われたので，何の心配もしていませんでした．そんなある日のこと，Nadler が Wrapped microlocal sheaves on pairs of pants というプレプリントを arXiv で公表します．桑垣さんは直ちにその内容についてセミナーで話してくれました．この論文で Nadler が構成可能層の ‘wrapped 版’（私の知る限り定着した日本語訳はまだありませんが，以下では巻構成可能層と呼ぶことにします）を，弱構成可能層（構成可能層の定義から有限性の仮定を取り除いたもの）のなす圏のコンパクトな対象として定義したのですが，それを桑垣さんが「感動のない定義」と評していたことが印象に残っています．確かに素朴な定義なのですが，これを突破口として，桑垣さんは連接/構成可能対応をコンパクトでない場合に一般化した上で証明しました．

Nadler のアイデアの原型的な例として，円周 S^1 上の局所定数層を考えてみましょう．S^1 は加法群 $\mathbb{Z}$ に付随する Eilenberg–Mac Lane 空間なので，複素ベクトル空間に値を取る S^1 上の局所定数層 $\mathcal{F}$ を与えることは，$\mathbb{Z}$ の群環である一変数 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 上の加群 M （言い換えると，代数多様体 $\mathbb{G}_\mathrm{m} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 上の準連接層 $\mathcal{M}$）を与えるこ

とと同値です．ここで，局所定数層 $\mathcal{F}$ が構成可能であるためには，M が $\mathbb{C}$ 上有限次元（すなわち，$\mathcal{M}$ の台が 0 次元）でなければなりません．一般に，トーリック多様体 X がコンパクトでなければ，X 上の連接層に要求される有限性よりも，対応する実トーラス上の構成可能層に要求される有限性の方が真に強くなります．この事が，連接/構成可能対応予想をコンパクトとは限らないトーリック多様体に対して定式化するための障害になっていました．Nadler の巻構成可能層は，弱構成可能層と構成可能層の中間にあって，連接/構成可能対応によってぴったり連接層に対応するものを与えます．

もともとの連接/構成可能対応予想を証明する際の困難は，コンパクトなトーリック多様体だけを考察の対象にしていることにありました．トーリック多様体はアファイントーリック多様体を貼り合わせて得られますが，コンパクトなトーリック多様体の範囲だけで議論を完結させようとすると，使える道具が限られます．使える道具の候補としてまず思い浮かぶのはトーリック極小モデルプログラムで，桑垣さんの修士論文ではまさにそれを使って滑らかな曲面の場合が証明されたわけですが，これをそのまま高次元化するのは困難です．巻構成可能層によって連接/構成可能対応予想をコンパクトとは限らないトーリック多様体に対して定式化することが可能になったので，まずアファイントーリック多様体の場合に証明して，それを貼り合わせることによって一般の場合を証明するという方針が立つことになりました．桑垣さんは博士論文でまさにそれを実行されましたが，単にコンパクト性だけでなく，「2 次元であること」「滑らかであること」「スタックではなく多様体であること」という修士論文にあった仮定がすべて取り除かれており，連接/構成可能対応の一つの決定版と言えます．これで博士論文だけでなく就職の心配も無くなったので，博士課程を短縮終了されたうえで，学振 DC（からの切り替えの PD）は任期を半分残したまま辞退されて，より待遇の良いカブリ IPMU にポスドクとして移られました．

その後，桑垣さんの研究の中心は，連接/構成可能対応から不確定 Riemann–Hilbert 対応や完全 WKB 解析などの代数解析に近い分野に移りました．連接/構成可能対応はある複素代数多様体の上の連接層と，次元が半分の別の実多様体の上の構成可能層の間の対応なのに対し，Riemann–Hilbert 対応は同じ多様体の上の $\mathcal{D}$ 加群と（適当な付加構造を付けた）構成可能層の間の関係なので，一見するとかなり違う話題にも思えるのですが，実際には様々な関係があり，その意味で博士論文の自然な延長線上にあるものです．この分野での大きな進展としては，平坦有理型接続の構造に関する Sabbah–望月–Kedlaya の福原–Levelt–Turrittin 定理や，それを受けた D'Agnolo–柏原の不確定 Riemann–Hilbert 対応があります．不確定特異点を持つ線形偏微分方程式系に対しては，素朴に解複体（あるいはその双対である de Rham 複体）を取ると特異点の近傍での解の増大度の情報が失われてしまうので，それを如何に回復（あるいは記憶）するか，という事が重要になります．D'Agnolo–柏原はこの問題に，柏原–Schapira によって発展させられた帰納層の理論と，考えている多様体に $\mathbb{R}$ を

直積するという Tamarkin によって導入された（Nadler による巻構成可能層の場合と同様に，ある意味で素朴だが非常に有効な）アイデアを用いて，一つの解答を与えました．この $\mathbb{R}$ 方向はシンプレクティック幾何における面積（従って WKB 解析や変形量子化における Planck 定数や深谷圏における Novikov 変数）と関係し，層の超局所理論では見ることのできない動径方向を回復する役割を果たします（層のマイクロ台は常に錐になるので，動径方向（あるいはそれに双対な（余）方向）の情報は持たないが，完全 WKB 解析がこれを回復するのだというのが佐藤幹夫の哲学でした）．桑垣さんは考えている空間に $\mathbb{R}$ を直積する代わりに，加法半群 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の半群環 $\Bbbk[\mathbb{R}_{\geq 0}]$ 上の $\mathbb{R}$ 次数付き加群に値を取る層を用いて，不確定 Riemann–Hilbert 対応を定式化し直しました．この $\mathbb{R}$ 次数付けは解の増大度を記憶するのに使われます．また，正則関数の分だけ違う増大度は同じとみなす必要があり，そのために D'Agnolo–柏原では帰納層の理論が使われていますが，その役割は桑垣さんの定式化では半群環の不定元を 1 に送る準同型が担っています．桑垣さんは彼の定式化を用いて不確定偏屈層の概念を導入し，それらが不確定 Riemann–Hilbert 対応によってぴったりホロノミック $\mathcal{D}$ 加群と対応する事を示しました．

微分作用素環 $\mathcal{D}$ のフィルトレーションに関する逐次商として余接束の座標環が得られ，$\mathcal{D}$ 加群（これは線形偏微分方程式系の座標に依らない定義を与えます）の逐次商として特性多様体が得られますが，この事を指して $\mathcal{D}$ 加群は特性多様体の量子化であると言います．$\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ が確定ホロノミックであれば，$\mathcal{M}$ の特性多様体 L は余接束の Lagrange 部分多様体になる一方，Riemann–Hilbert 対応によって $\mathcal{M}$ は偏屈層 $\mathcal{F}$ に移りますが，この状況で $\mathcal{F}$ は L の層量子化 (sheaf quantization) であると言います．この偏屈層と Lagrange 部分多様体の関係は Nadler–Zaslow によって構成可能層の導来圏と余接束の深谷圏の同値に格上げされました．これを一般化して，ある空間の深谷圏（の変種）を別の空間の層の言葉で記述することを漠然と指す言葉が層量子化です．一般に層の計算は深谷圏の計算よりも易しいので，これができればシンプレクティックトポロジーに様々な応用を持ちます．実際，Tamarkin はこの層量子化のアイデアを用いて，余接束の 2 つの部分集合が Hamilton 同相で共通部分を持たないように移動させられるための十分条件を与えました．桑垣さんはこの層量子化とその周辺の問題に関する興味深い結果を次々と発表されており，多くの研究者がその行方に注目しています．桑垣さんの将来的な目標の一つは，この層量子化をコンパクトなシンプレクティック多様体のシンプレクティックトポロジーの研究に応用することにあるようです．これは原理的に可能なのかどうかすら分からない困難な問題ですが，仮に部分的にでも実現できれば大きな進歩なので，ぜひとも成功して欲しい所です．この問題に限らず，今後も桑垣さんが困難な問題に取り組み，驚くべき成果を挙げられることを楽しみにしています．