

# 書 評

## 数論幾何入門

—モジュラー曲線から大定理・大予想へ—

三枝洋一 著， 森北出版， 2024 年

青山学院大学理工学部物理・数理学科

関 真一朗

本書は、著者の三枝洋一氏が東京大学の1・2年生向け科目「全学自由研究ゼミナール」で行った講義を基にして執筆された、数論幾何学の入門書である。約200ページの分量で、数論幾何学における重要な大定理（フェルマー予想、志村-谷山予想、佐藤-テイト予想、ヴェイユ予想）や、今もなお目標である大予想（ラングランズ予想、BSD予想）の内容を知ることができる。数論幾何学の全てがこれら6つの大定理・大予想に集約されるわけではないが、どの1つをとっても独立した書籍にすることが可能なほど深い内容であることを考えると、盛り沢山である。これから数論幾何学を志す学生、専門外の数学者、数論幾何学に興味を持つ数学愛好家など、幅広い層にお勧めの一冊である。

本書の購入を検討している方の中には、「数論幾何」という言葉に対して「難しそう」という印象を抱き、さらに「入門」という言葉からも「逆に難しいのではないか」と感じ、不安を覚える方がいるかもしれない。しかし、その不安は無用である。数論幾何学が難しいとされる主な理由は、スキーム論や代数的整数論などの膨大な予備知識が要求される点にあるが、著者が本書で示すように、数論幾何学が扱う現象や定理・予想の魅力を感じるためには、必ずしもそうした高度な知識は必要ではない。また、「入門」という言葉が時に難解な印象を与えるのは、網羅的かつ厳密な証明が詰め込まれた実際に難しい専門的な教科書が「～入門」と題されていることが多いからであるが、本書は一般向けの書籍と難解な専門書の間位置する。要求する予備知識はできるだけ抑え、証明を付けるのはその範囲内で可能なものに限り、全体的に高度になり過ぎない工夫が施された内容となっている。本書はよくある「難解な入門書」ではない。

本書で必要とされる予備知識は、高校までの内容に加え、微分積分の基礎、複素解析の基礎、そして集合と写像に関する基本的な記法と用語である。本書の場合、予備知識をなるべく少なくしようとしているが、著者の「集合と写像の記法・用語については、使わないとかえって分かりづらくなる」という見解には完全に同意する。また、本書では、複素解析が主要なツールとして使われているが、必要な事項は付録Aにコンパクトにまとめられているため、読者はそこで必要な知識を確認できる。著者は、読者が躓かないように予備知識の範

圏内で記述するという方針を徹底しており、代数学や位相空間論の知識は基本的に前提としていない。例えば、本書では  $SL_2(\mathbb{Z})$  やモーデル-ヴェイユ群を扱うため、行列や群の概念が登場するが、それらは必要な範囲で都度定義される。また、準同型写像が出てきてもその用語自体は使用されず、尖点形式の空間の次元に関する定理も基底や次元の概念を前提にせずに説明されている。既に知識を持つ者にとっては不思議に思える表現もあるかもしれないが、これは不必要な一般論や専門用語を避けることで、より多くの人々に数論幾何学の魅力を伝えようとする著者の配慮の表れであろう。

本書の最大の特徴は、6つの大定理・大予想が紹介される後半の第7章以降に向けて、前半ではモジュラー曲線を学ぶ構成となっている点である。本書の副題は、この内容を的確に反映していると言える。モジュラー曲線を軸に据えた理由は、それが実際の数論幾何学の研究において中心的な役割を果たしているためであり、特に第7章や第9章でその重要性が実感できる。著者も「日本語で書かれたモジュラー曲線の解説書は著者の知る限りほとんどなく、そのことが本書を執筆した動機の1つとなっている」と述べており、確かにフェルマー予想や佐藤-テイト予想などを扱った日本語の書籍は存在するが、評者の知る限りはモジュラー曲線を本書のレベルで解説した和書は他に例を見ない。なお、商集合や種々の同型概念の厳密な定義、リーマン面の概念には踏み込まずにモジュラー曲線の解説が試みられている。さらに、本書の後半に登場する内容を理解するためには、楕円曲線と保型形式についてある程度の知識が必要となるが、本書はモジュラー曲線を学ぶ過程で自然とそれらの概念を習得できるよう構成されている。初学者にとって、なぜそれらを学ぶ必要があるのかを事前に理解するのは難しいが、必要かつ必然的な流れでこれらの概念が登場するため、本書の流れでモジュラー曲線を学んだ読者は、いつの間にか楕円曲線と保型形式についても理解を深めている状況に至るのである。

数学においては証明を理解することで初めて理解が深まり、地に足がついた感覚で次へ進む自信が得られるため、数学書には基本的には証明があった方が望ましいだろう。しかし、数論幾何学の膨大さを考慮すると、全てに証明を付けることは現実的ではない。本書ではその点で、証明を付ける箇所と省略する箇所の選択が非常に巧妙である。証明が付けられている箇所では、注意すべきポイントが全て網羅されているにもかかわらず無駄のない記述がなされている。証明を省略した場合でも、特別なケースでのみ証明を記述したり、具体例を挙げることで理解を補完する構成になっている。これにより、読者は知識がしっかりと身についた感覚を保ちながら、第6章までを着実に読み進めることができる。このように鍛えられた状態になるおかげで、第7章以降の内容にも高い理解を持って取り組むことが可能である。とはいえ、後半は事実の紹介が中心となり、危うく浮遊感を感じてしまう部分もある。しかし、そのタイミングで第8章や第10章において再び読者を「地面に下ろしてくれる」ような内容（証明付きの命題）が現れる。この絶妙なバランスが本書の大きな魅力であり、読者

に確かな手応えを与えながら、短期間で数論幾何学入門させる構成は見事である。評者としては、著者の選択に従い、省略されている部分については気にせず読み進めることを推奨する。と言われても気になってしまうのは、数学を学ぶ者としての性分だろう。本書では各章の最後に「参考文献ガイド」が付されており、途中で気になったことがどの論文や書籍に詳しく書かれているのかが親切に案内されている。個人的には、通読後に気になった箇所を追って勉強すれば十分だと思っているが、読んでいる最中に調べたい読者には、この参考文献ガイドを大いに活用することをお勧めしたい。

ここからは各章の内容を少しずつ説明する予定で、そのための資料として各章の内容を簡単にまとめた文章を実際に作成していた。しかし、既に書評としての標準的な分量に達しつつあるため、ネタバレしすぎるのはよくないし、各章の詳しい説明は控えることにした。各章の内容が気になる場合は、公開されている目次を参考にしてほしい。代わりに、特に印象に残った点に絞って述べることにする。

第7章では志村-谷山予想やフェルマー予想が解説されるが、志村-谷山予想がいきなり提示されるのではなく、モジュラー曲線の  $\mathbb{F}_p$  有理点の個数に関する法則を調べるところから始まる。これは、モジュラー曲線が整数係数の方程式で定まる代数曲線であることを前半部分で学んだことによって、その  $\mathbb{F}_p$  有理点を考えることができるようになったのであり、第1章の内容を踏まえると自然な流れである。続いて、モジュラー曲線を基に、重さ2の尖点形式  $f$  から対応する楕円曲線  $E_f$  を構成する方法やモジュラー一意化が解説される。こうしたモジュラー曲線に関する議論の中で、では「逆の対応も成り立つのだろうか?」と自然に志村-谷山予想の問題意識を理解できる。評者のように、一般向けの書籍であるサイモン・シンの『フェルマーの最終定理』(新潮社)等で漠然と志村-谷山予想に触れた読者にとって、本書での正確な志村-谷山予想の解説に出会うことは格別の喜びをもたらすだろう。また、第7章の5節ではラングランズ予想についても触れられており、そこで紹介される重さ1の尖点形式の例は興味深いものである。ただし、他の大定理・大予想とは異なり、ラングランズ予想そのものの正確な主張は本書では詳しく紹介されていない。しかし、本書の性格を考えると、これはやむを得ない判断であろう。参考文献も提示されているため、より深く学びたい読者には十分な手がかりが提供されている。第9章では、ラングランズ予想に関連する最近の成果として、ニュートン-ソーンの定理が簡潔に紹介されている。

第9章では、佐藤-テイト予想およびBSD予想を含む楕円曲線に関する話題が解説されているが、本書の大きな特徴として特筆すべきは、グロス-ザギエ-コリヴァギンの定理とその証明の流れが解説されている点である。この定理の証明で重要な役割を果たすヒューナー点(Heegner point)がモジュラー曲線上の点として定められることから、前半で学んだ内容と自然に結びつく話題であり、本書の構成上も適切な位置付けとなっている。グロス-ザギエ公式そのものの数式などは紹介されていないものの、なぜ楕円曲線  $E$  の階数  $\text{rank}(E)$  が0または1と結論付

けられるのか、その証明の仕組みがポイントを押さえて分かりやすく解説されている。さらに、メイザーによる  $E$  の  $\mathbb{Q}$  上のねじれ部分群  $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$  の構造決定に比べると弱い結果ではあるが、本書で紹介された複数の結果を組み合わせることで「 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線は 11 等分点である  $\mathbb{Q}$  有理点を持たない」という著しい結果が得られることは感慨深い。

評者は、有名な定理の証明をまるごと理解することに大きな達成感を覚えることが多いが、本書の第 7 章以降で紹介される大定理について、その全てを理解するのは非常に困難であり、現実的ではない。しかしながら、第 10 章において、ヴェイユ予想の特別な場合であるハッセの定理の証明がまるまる紹介されている点には大きな満足感を得た。この証明はマニンによる初等的な手法によるものである。具体的には、 $E$  を  $\mathbb{F}_p$  上の楕円曲線とし、多項式  $f(x) = x^2 - (1 + p - \#E(\mathbb{F}_p))x + p$  が異なる 2 つの実数解を持たないことを示すことが目標である。そのためには任意の整数  $n$  に対して  $f(n) \geq 0$  であることを示せばよい。マニンの証明では、 $\mathbb{F}_p(t)$  上の特定の楕円曲線に対する  $\mathbb{F}_p(t)$  有理点列  $(P_n)$  を考え、そこから定まる非負整数  $d_n$  に対して  $f(n) = d_n$  が成り立つことを示している。この関係が成り立つことは初等的な計算で確かに確認できるが、背景知識を持たない評者にとって、なぜこのような現象が成り立つことを発見できたかは不思議に感じた。参考文献ガイドには、知識が必要ではあるものの、より見通しの良い証明が掲載された文献も紹介されている。

本書はその内容だけでなく、気になる誤植が全く見当たらないという点でも極めて高品質である。各分野において一般向けの書籍と難解な専門書の間位置する入門書がもっとあればよいと思うが、本書はそのような入門書の理想的なスタンダードとなりそうだ。