女子中高生夏の学校 2024
実験・実習「数学を使ってゲームの必勝法を見つけてみよう」

九州大学基幹教育院
斎藤　新悟

1　はじめに

筆者は，女子中高生夏の学校 2024（以下,「女子中高生夏の学校」を単に「夏学」と呼びます）で日本数学会が実施する実験・実習を担当しました．本稿ではその内容について報告します．夏学 2024 の全体像については，本誌に掲載されている谷口隆氏の記事をご覧ください．なお，過去の『数学通信』にも夏学に関する記事があります（例えば昨年は今井桂子氏による記事[1]と永原健大郎氏による記事[2]があります）ので，よろしければ併せてご覧ください．

2　ニムについて

実験・実習では**ニム**と呼ばれるゲームを扱いました．実験・実習の具体的な内容を次節で述べる前に，本節ではニムについて日本数学会の会員向けの説明を行いたいと思います．

0 以上の整数全体の集合を $\mathbb{N}_0$ と書きます．$k \in \mathbb{N}_0$ 枚のお皿のそれぞれに $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ 個のおはじきが入っており，2 人の人（先手，後手と呼ぶことにします）が交互におはじきを取っていきます．ただし，1 枚のお皿からは（1 個以上であれば）何個おはじきを取っても構いませんが，2 枚以上のお皿から同時におはじきを取ることはできません．どのお皿にもおはじきがなくなって取れなくなった人の負けです．このゲームが先手必勝・後手必勝のどちらであるか（先手必勝・後手必勝のどちらかであることは帰納的に示せます）を $n_1, \ldots, n_k$ から判定する問題を考えます．

実は，この問題には非常に簡明な判定条件が知られています．その判定条件を述べるために，$\mathbb{N}_0$ 上の演算 $\oplus$ を次のように定義します：$a, b \in \mathbb{N}_0$ に対して，a, b を 2 進法で表し，桁ごとに mod 2 で加えて得られる数を $a \oplus b$ と書きます（これを a と b の**ニム和**と呼びます）．例えば，

$$13 \oplus 6 = 1101_{(2)} \oplus 110_{(2)} = 1011_{(2)} = 11$$

[1] `https://www.mathsoc.jp/assets/file/publications/tushin/2803/2023natsugaku-imai.pdf`
[2] `https://www.mathsoc.jp/assets/file/publications/tushin/2803/2023natsugaku-nagahara.pdf`

となります（添字に (2) と書いてあるものは 2 進法での表記で，それ以外は 10 進法での表記です）．$(\mathbb{N}_0, \oplus)$ はアーベル群であることが分かります（単位元は 0 で，$a \in \mathbb{N}_0$ の逆元は a 自身です）．

このとき，後手必勝であることと $n_1 \oplus \cdots \oplus n_k = 0$ であることは同値であるという定理が知られています．証明はそれほど難しくはありませんがここでは省略します．参考文献 [1, 2, 3] をご覧ください．

3　実験・実習の内容

日本数学会の実験・実習には，中学 3 年生から高校 2 年生までの 7 名が参加しました（なお，担当者に知らされるのはニックネーム・学年・都道府県名のみで，フルネームや在籍学校名は知らされません）．

初めに，トランプを利用してランダムに 2 つの班に分け，班内で「どうして日本数学会の実験・実習を選んだか」を含めた自己紹介をしてもらいました．また，数学に関するグループワークをするにあたって，次のようなコメントをしました：

- 競争ではないので，アイデアを思いついたら班の人と共有しましょう．結果的にそのアイデアが間違っていても問題ありません．
- 他の人が言ったことが分からないときは質問しましょう．他にも分からないと思っている人がいるかもしれませんし，質問に回答することが本人の理解を深めることもあります．
- 他の人のアイデアの誤りを指摘しても構いません．ただし，人格を否定するようなことは言ってはいけません．

その後，お皿が 3 枚の場合のニム（三山崩しと呼ばれることもあります）について説明し，実際におはじきを使って班で必勝法について考えてもらいました．あまり丁寧な誘導をしなかったので苦戦する生徒さんも多かったですが，粘り強く思考や議論を進めてくれました．$(0, n, n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$ が後手必勝である（(l, m, n) は 3 枚のお皿にそれぞれ l, m, n 個のおはじきがある状態を表しています）ことに生徒が気づいたあたりで，$m, n \in \mathbb{N}_0$ を固定したときに (l, m, n) が後手必勝となるような $l \in \mathbb{N}_0$ は高々 1 つである（実際，$l_1 > l_2$ で，(l_1, m, n), (l_2, m, n) の両方が後手必勝と仮定すると，(l_1, m, n) で渡された人は (l_2, m, n) で返せるので矛盾）ことを説明し，$m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して (l, m, n) が後手必勝であるような l を表にしてみようと伝えました．当日は，残念ながらこの表を作っている途中で時間が来てしまいましたが，次のような表ができます：

n

m		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	0	3	2	5	4	7	6
	2	2	3	0	1	6	7	4	5
	3	3	2	1	0	7	6	5	4
	4	4	5	6	7	0	1	2	3
	5	5	4	7	6	1	0	3	2
	6	6	7	4	5	2	3	0	1
	7	7	6	5	4	3	2	1	0

この表を見ると，2 進法を用いるとよさそうなことが見て取れ，実際にすべて 2 進法で書き直してみると次のようになります：

n

m		000	001	010	011	100	101	110	111
	000	000	001	010	011	100	101	110	111
	001	001	000	011	010	101	100	111	110
	010	010	011	000	001	110	111	100	101
	011	011	010	001	000	111	110	101	100
	100	100	101	110	111	000	001	010	011
	101	101	100	111	110	001	000	011	010
	110	110	111	100	101	010	011	000	001
	111	111	110	101	100	011	010	001	000

この表を眺めると，$l = m \oplus n$（これは $l \oplus m \oplus n = 0$ と同値）と予想でき，証明に進むことができます.

今回の実験・実習で行ったことは，データを作成し（いわゆる「実験」），規則性を発見して予想を立て，それを証明するという流れになっています．この流れは数学の研究の基本的な進め方の 1 つであるという話を最後にまとめとして行いました.

終了後にアンケートを取り，日本数学会の実験・実習を選んだ理由と，実験・実習を受講しての感想を尋ねました．前者については,「数学が好きだから」という回答がほとんどで，中には「ゲーム」という単語に惹かれたという人もいました．後者については，自分で時間をかけて公式・定理を予想し，正しいかどうかを検証していくことの大変さが分かり楽しかったという回答が主要なものでした．この回答を見て，長い時間じっくりと考えることは大変だが楽しいと生徒の皆さんが感じてくれたことに感銘を受けました．

4　所感

夏学で私が接した生徒さんの中には, 微分の定義で $h \neq 0$ としているはずなのに後で $h = 0$ を代入しているように見えることが納得いかない方（そのときには時間があまりなかったので，イプシロン・デルタ論法というキーワードだけお知らせしました），Journal of the Mathematical Society of Japan を読みたいので日本数学会に入会したいがどうすればいいかと尋ねてきた方（arXiv と zbMATH Open をお知らせしました），Carmichael 数について研究を行っている方（有益なアドバイスはできませんでした……）など面白い方がたくさんいらっしゃいました．

実験・実習でかなりしっかりとした考察をしてくれた生徒さんと話していて，その方が実は学校の試験ではそれほど点数が高くないということを話してくれたことも印象に残っています．今回の実験・実習が，学校の試験では測りきれない数学の能力を本人が認識する一助となっていればうれしく思います．

今回初めて夏学に参加して，夏学は実行委員の皆様を中心として数多くのスタッフの多大な努力で実施されているということを実感しました．日本数学会の会員の中でも，大山口菜都美氏（東京理科大学）は今回の実行委員長を務められており，柏原賢二氏（東京大学）も長年実行委員を務められています．関係する方々に敬意を表するとともに，夏学が引き続き開催され，日本数学会が今後も協力していけることを願っています．

謝辞

実験・実習の実施にあたっては，日本数学会男女共同参画社会推進委員会の谷口隆氏（神戸大学）および大森源城氏（芝浦工業大学），ポスター担当の長谷川泰子氏（東京慈恵会医科大学），TA の板橋美怜氏（お茶の水女子大学）にお力添えをいただきました．厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 一松信，石とりゲームの数理，森北出版，2003.

[2] 佐藤文広，石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係，数学書房，2014.

[3] 安福智明，坂井公，末續鴻輝，組合せゲーム理論の世界：数学で解き明かす必勝法，共立出版，2024.