会員ニュース

入江慶氏の日本学士院学術奨励賞および
日本学術振興会賞受賞に寄せて

ニューヨーク州立大学サイモンズ幾何物理センター
深谷　賢治

入江慶氏が日本学士院学術奨励賞および日本学術振興会賞を受賞されたので，まずお祝いをいわせていただきたい．

入江氏は文部科学大臣表彰若手科学者賞も受賞していて，そのときも，『数学通信』に同様な原稿を書かせていただいた．ここでは，重複を避けるため，もう少し入江さんの業績について述べたい．（この種の原稿では，個人的なエピソードなどもそこそこ書くので，それに比して，以下の文は少し専門的になってしまうかもしれない．ご容赦いただきたい．）

入江さんの大きな業績は closing lemma に関わるものである．closing lemma は力学系の重要な問題であるが，筆者は力学系全般の専門家というわけではないので，むしろそこで使われた symplectic 幾何学の手法について述べたい．closing lemma は力学系の閉軌道に関わる結果であり，入江さんの結果は 3 次元接触多様体のレーブ流とか 2 次元多様体のシンプレクティック同相（2 次元では面積保存と同値）についてのものである．（後者は浅岡さんとの共同研究．）シンプレクティック幾何学で閉軌道を研究する方法は大変発達していて，フレアーが導入したフレアーホモロジーはその研究の主要な道具である．多様体のベッチ数とその上の関数（モース関数）の臨界点の関係（モース理論の主要部分である）を無限次元化して得られるのが，フレアーホモロジーのランクとハミルトン力学系の閉軌道の数の関係で，これがフレアーホモロジーの一番大切な応用の一つである．これはいわば定性的なことで，つまりフレアーホモロジーのランクはハミルトン力学系の取り方によらない．（これはホモロジー群が位相不変量であることの「無限次元版」である．）

入江さんの研究では，定性的なフレアーホモロジーだけではなく，より定量的な性質が大きな役割を果たす．ホモロジーに定量的なものを持ち込むことは最近では活発に研究されていてパーシステントホモロジーという名前を聞かれた方もいるかもしれない．モース理論と関わる部分を少し説明する．モース関数が与えられると，その臨界点を生成元とする自由アーベル群上に境界作用素がさだまり，それは多様体のホモロジー群を与える．（モース複体，ウィッテン複体などと呼ばれる．）モース複体の

ホモロジー群は多様体のホモロジー群なのだから，モース関数の取り方によらない．つまり定性的である．

モース複体からモース関数の性質をもう少し取り出すには，次のようにする．モース関数の臨界点にたいしては，そこでのモース関数の値，臨界値を考えることができる．そうすることで，モース複体にフィルトレーションが定まる．すなわち，モース複体は単にチェイン複体であるだけではなく，フィルトレーションがはいっている．フィルトレーション付き複体としてのモース複体はモース関数の取り方によって変わる．たとえば，多様体のホモロジー群の元を考えると，その代表元がどのフィルトレーションのレベルで初めてあらわれるか，を考えることができる．そのような情報を含めて考えることで，定量的な性質を読み取ることができるのである．

以上の話は有限次元のモース理論の場合だが，フレアーホモロジーは無限次元のモース理論と見做せるので，同様な考察が可能である．さらに次のような考察とも結びつけられる．たとえば，シンプレクティック多様体のハミルトン同相写像 F を考えよう．この場合臨界点にあたるのは，F 不動点つまり $F(p)=p$ となる点 p である．力学系で重要なのは，F を何回も繰り返した写像 F^n の n が無限大に近づくときの漸近的な性質である．これを先ほどの臨界値に関わるフィルトレーションと組み合わせる．荒く書いてしまうと，F^n のフレアーホモロジーは n によらない．そこでこのフレアーホモロジーの元に対して，それがフィルトレーションのどのレベルで初めて現れるかを考え，その n が無限大に近づくときの漸近的な性質を研究することができる．これはシンプレクティック幾何学やハミルトン力学系で重要で，ヴィテルボ，シュワルツ，オオ，ポルテロヴィッチ，エントフなど多くの人によって研究されてきた．

ただし，入江氏の得た closing lemma のような結果は，この定量化だけからは得られない．それには，これとサイバーグ-ウィッテン理論との関係などが必要である．3 次元多様体の場合，サイバーグ-ウィッテン理論（モノポール方程式）は，やはりフレアーホモロジーの一種を与える．（その生成元はモノポール方程式の解である．）3 次元多様体に接触構造があると，サイバーグ-ウィッテン理論の与えるフレアーホモロジーと接触構造が定めるフレアーホモロジー（その生成元はレーブベクトル場の閉軌道）は同型であることが知られている．これはタウベスによる 3 次元の場合のワインシュタイン予想（接触構造のレーブベクトル場には必ず閉軌道が存在する）の解決を導いたもの，というより，3 次元の場合のワインシュタイン予想の肯定解をより組織的かつ強くしたものになっている．この辺りを確立した論文群は，タウベスやハッチングスによるもので，膨大なものである．ここに現れる接触構造が定めるフレアーホモロジーは，ECH（埋め込まれた接触ホモロジー）とよばれるもの

で，高次元でも定義される接触ホモロジーとは違うものである．ECH の定義そのものがこの論文群に含まれていて，じつは，ECH の定義そのものに今のところサイバーグ-ウィッテン理論（ゲージ理論）を使わないといけない部分がある．フレアーホモロジーなので，サイバーグ-ウィッテン理論のフレアーホモロジーにも今まで述べたような，定量化が可能である．サイバーグ-ウィッテン理論のフレアーホモロジーと ECH の一致はこの定量化も含めて成立している．

タウベスとともに ECH の確立に大きく貢献しているハッチングスはこの定量化を研究し，共同研究者たちと共に，それが 3 次元多様体の体積と関わることを発見した．ここで入江氏の登場となる．レーブベクトル場の周期軌道の様子は，定量化を含めて ECH と関わる．そうすると，ECH とサイバーグ-ウィッテン理論のフレアーホモロジーの一致，そしてサイバーグ-ウィッテン理論のフレアーホモロジーの定量化と体積の関係，をあわせると，レーブベクトル場の周期軌道の様子と 3 次元多様体の体積が関わることになる．入江氏がここで着目したのは，体積は局所的なものを積分した量だから，接触多様体をどんな小さい一部で変形しても，その大きさが本当に変わる，ということである．レーブベクトル場の周期軌道の様子から体積が「見える」のだから，どんな小さい一部で接触構造を変形しても，周期軌道の様子が変わらなければいけない．とすると，接触構造の周期軌道の集合は稠密でなければならない．この最後の結論が closing lemma なのである．

入江氏は（謙虚な人なので）この結論を得たあと，それはもう知っているでしょうね，というような連絡をハッチングスにしたらしい．ハッチングスは，正直に，考えたこともなかった，と答えたそうである．（ハッチングスは入江氏のこのアイデアを使った論文を後に書いている．）重要な発見は，異なった種類の数学的考察が突然結びつけられた時，しばしば起きる．あと智慧だとそりゃそうだろうなどと思うことが，研究の発展の転換点であることがしばしばあることは，数学者ならみな経験していることだと思う．

臨界点の漸近的な振る舞いと体積の関係は，極少曲面でもあり，それが入江氏のマルケスやネブスとの共同研究の大事なアイデアとなった．

なんだか，お祝いの言葉というより，数学の解説になってしまったが，入江氏の研究の重要性を理解していただく一助になれば幸いである．

入江氏の今後の研究のますますの発展を祈ってここで終わりたい．