オイラーがつなぐ生物たち
— 八目鰻，ウロコムシ，カエル，アゲハチョウ …… — [1]

奈良女子大学 研究院自然科学系数学領域・岡数学研究所
松澤　淳一

この講演では，生物が体内にもつ興味深い幾何学的構造についてご紹介します．（本稿で使用する画像はグレイスケールですが，『数学通信』のウェブサイトにはカラー画像がありますのでそちらもご覧下さい．）

1　生物の組織と幾何学模様

以下に並べた図はそれぞれアフリカツメガエル（図 1) の細胞のミトコンドリア（図 2)，ヤツメウナギ（図 3) の網膜色素細胞（図 4)，ウロコムシ (図 5) の発光器の細胞（図 6）です．いずれの写真にも規則正しく並んだ組織が見られます．規則正しく並んだ模様のスケールは，いずれも数百ナノメートルです（1 ミリの 1000 分の 1 が 1 マイクロメートル，その 1000 分の 1 が 1 ナノメートルです．）

図 1:　アフリカツメガエル:　Brian Gratwicke - Flickr: Xenopus laevis, CC 表示 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23752908

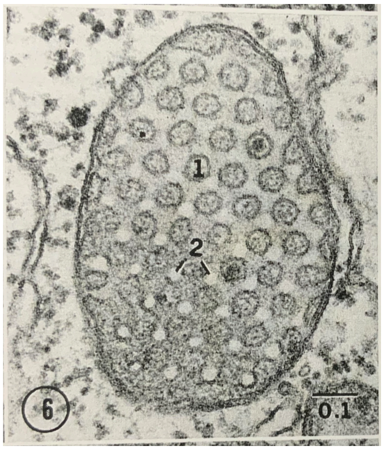


図 2: アフリカツメガエルのミトコンドリア：M. R. Kalt, The anatomical record, vol. 182(1) , pp53-60, 1975, Copyright © 1975 Wiley - Liss, Inc.

[1] 2024 年度年会市民講演会 (2024 年 3 月 16 日)

図 3: ヤツメウナギ: Tiit Hunt, CC BY-SA 3.0, https://commons. wikimedia.org/wiki/File:J%C3%B5esilmud2.jpg

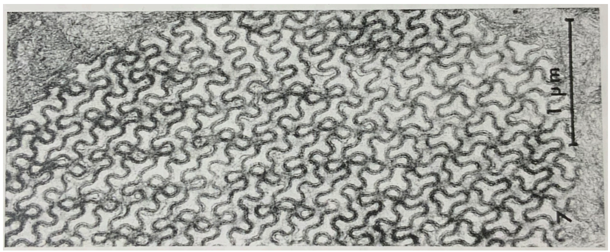


図 4: ヤツメウナギの網膜色素細胞：P. Ö hman, Acta Zoologica, vol. 55(4), pp245-253, 1974 , © 1974 The Royal Swedish Academy of Sciences

図 5: ウロコムシ. Sus barbatus, CC BY-SA 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

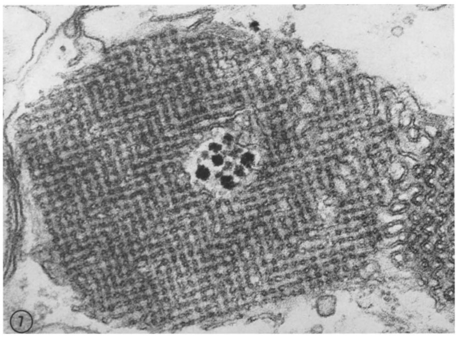


図 6: ウロコムシの発光器：
© 1966 J. M. Bassot, J.Vell Biol., https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles /PMC2107038/pdf/135.pdf

次はシジミチョウ（図 7）とアゲハチョウ（図 8）の写真ですが，羽の緑色の部分を拡大したものが図 9 です．図 9 の上段がシジミチョウ，下段がマエモンジャコウアゲハです．

図 7: シジミチョウ:
Megan McCarty, CC BY 3.0, https://creativecommons.org/licenses/by/3.0

図 8: マエモンジャコウアゲハ：
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

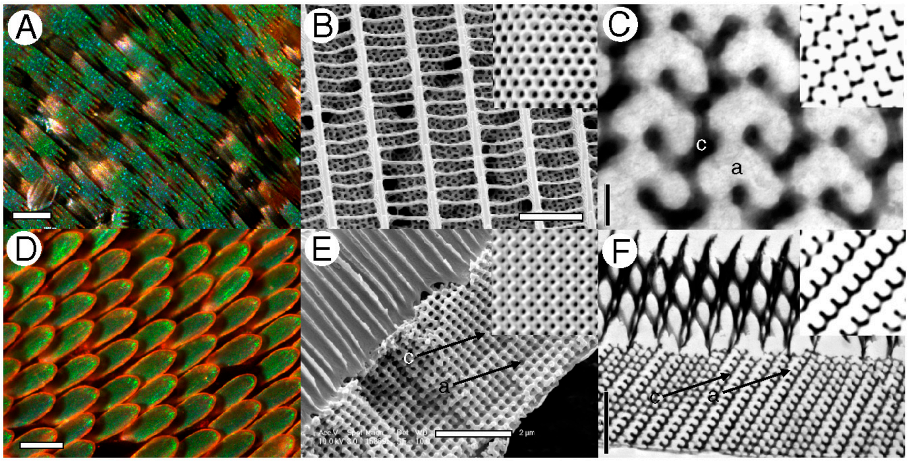


図 9: 蝶の鱗粉: Saranathan et al. , PNAS, vol. 107(26), 2010, pp.11676–11681, https://doi.org/10.1073/pnas.0909616107. 図中のスケールバーはそれぞれ A:100μm, B: 2.5μm, C: 200 nm ,D: 100μm, E: 2 μm, F:2μm

これらの写真に見られる幾何学的構造は，一見何の関連もないように見えますが，実は深く関連しています．

2　Schwarz の極小曲面とジャイロイド極小曲面

Cauchy-Schwarz の不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

や鏡像の原理などで有名なドイツの数学者 H. A. Schwarz(1843–1921) は，正四面体の 2 対の対辺が作る，角が 60 度の空間 4 角形を境界とする極小曲面（図 11）を決定しました（[Schwarz] vol. 1, pp. 1–125）．この曲面は針金とシャボン膜で作れます（図 12）．極小曲面とは，曲面上に小さな閉曲線をとるとき，これを境界に持つ曲面の中でこの曲面の面積が極小であるような曲面のことです．

図 10: H. A. Schwarz(1843–1921)

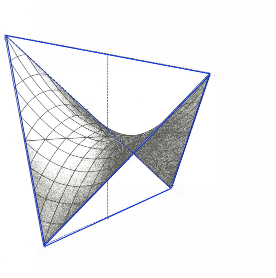


図 11: 角が 60 度の空間 4 角形を境界に持つ極小曲面

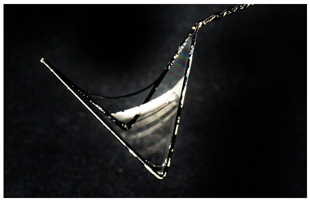


図 12: 空間 4 角形を境界に持つ石けん膜. National Musium of American History. https://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/geometric-models-minimal-surfaces-as-soap-films

この極小曲面片をその辺に関して 180 度回転させて得られる曲面片は，もとの曲面片と滑らかにつながります．これを極小曲面の鏡像原理と言います．このように曲面片をその辺に関して次々と 180 度回転させることによって（図 13)，曲面は無限に広がっていきます．こうして得られた極小曲面は Schwarz の極小曲面とよばれます．図 14 はこの曲面の基本単位を切り取ったもので，これを上下左右前後に平行移動させることで Schwarz の極小曲面が得られます．

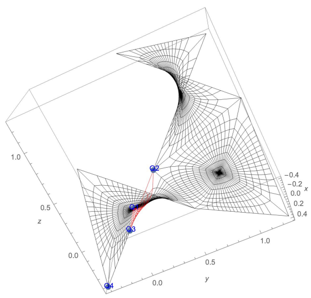


図 13: 辺に関して 180 回転させて得られる曲面

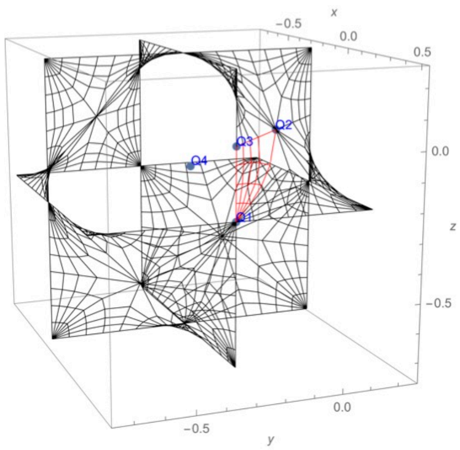


図 14: Schwarz の極小曲面

さて図 14 をよく見ると 4 つの特徴的な曲面片が見えます．これらは後に説明するように，立方体の辺から選んだ 6 つの辺が作る空間 6 角形（図 38 の左図）を境界にもつ極小曲面（図 38 の中央と右）です．立方体の一辺の長さを l とし，これら 4 つの曲面片に対応する 4 つの立方体の共有点を O とします．O の回りには一辺 l の立方体が 8 個あります．曲面片があるのはその中かから一つ飛びに選んだ 4 つの立方体です．残りの 4 つの立方体の重心は正四面体の頂点を成し，これらとその重心である O とを結ぶと，ダイヤモンド結晶格子の

4 面体構造ができます．

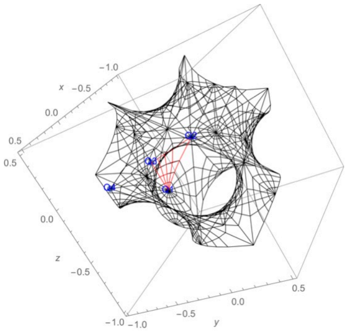


図 15: Schwarz 極小曲面

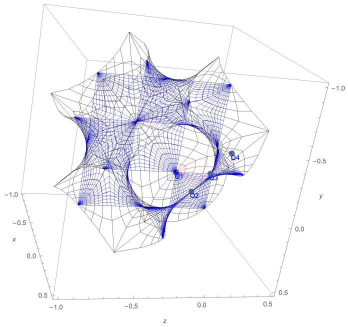


図 16: Schwarz 極小曲面

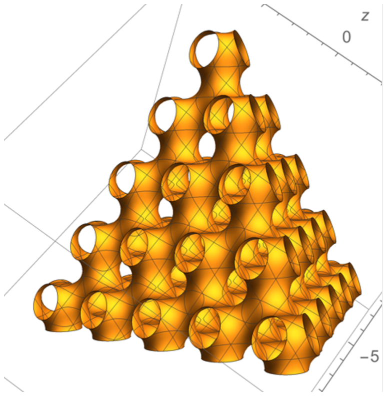


図 17: Schwarz 極小曲面

Schwarz の極小曲面は空間を二分しますが，その片側にある上記の 4 面体構造を平行移動で空間に広げていくとダイヤモンド結晶構造が得られます．このような関係があるため，Schwarz の極小曲面はダイヤモンド曲面，Schwarz の D 曲面などとも呼ばれます．

図 18 はダイヤモンド結晶格子模型で，Schwarz 極小曲面の図 20 と比べると幾何構造が類似していることを感じていただけると思います．

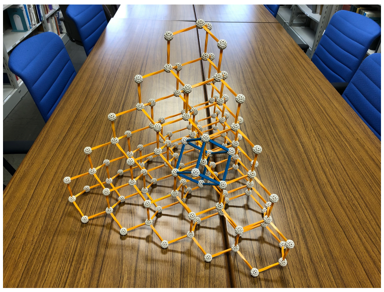


図 18: ダイヤモンド結晶格子模型

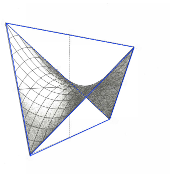


図 19: Schwarz 極小曲面片

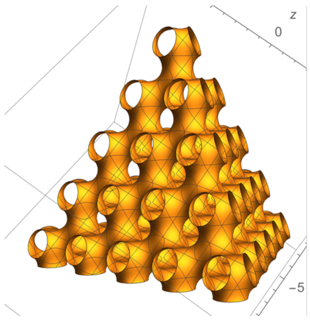


図 20: Schwarz 極小曲面

さて，極小曲面にはその共役曲面というものがあります（第 5 節で説明します）．Schwarz 極小曲面の共役曲面は Schwarz の P 曲面とよばれます（図 21）．

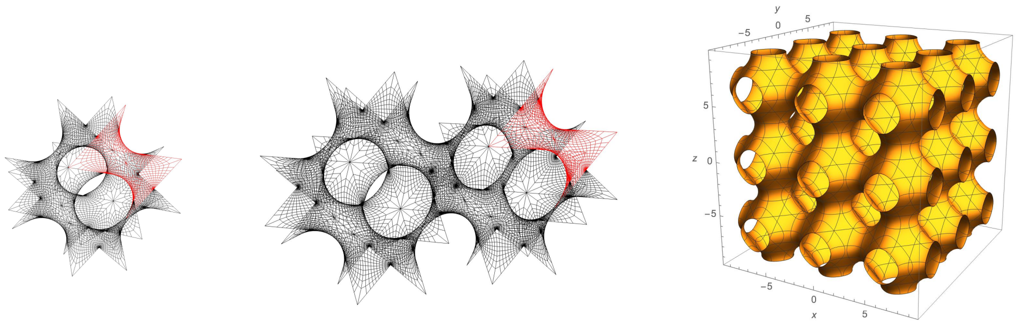


図 21: Schwarz の P 曲面

次にご紹介するのは，Gyroid 極小曲面とよばれる極小曲面です (図 23)．これは Alan Schoen (ショーンと読みます) によって発見された極小曲面です ([Schoen1])．図 22 は 2013 年に Schoen 氏宅を訪問したときの写真です．このときショーン氏は 90 歳でした．自作の極小曲面のプラスティックモデルや立体図形などが所狭しと置かれていました（図 22)．Schoen 氏のホームページ (https://schoengeometry.com ）は，Gyroid 曲面だけでなく，3 重周期的極小曲面，タイリング，そしてパズルなど興味深い話題が満載されていてとても楽しめます．ジャイロイドという名称は，Schoen 氏が付けたものです．この曲面は Schwarz の極小曲面と同様，空間を 2 分しますが，2 分された空間は迷宮の様な複雑な構造をしています．しかし，Schwarz の極小曲面の場合と類似の結晶格子をその中に作ることができます．この結晶は古くから知られたもので，Laves のグラフなどとよばれていました (図 24，[Coxeter])．Laves グラフは，平面上の一点で 120 度の角度を成して交わる同じ長さの 3 本の腕が，捻れながら旋回し 3 方向に進んで行きます．この様子から Schoen 氏はこの極小曲面を Gyroid 曲面と名付けたそうです．

A.H.Schoen (1924-2023)

図 22: ショーン氏作成の立体模型

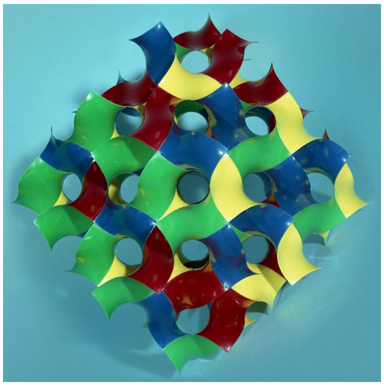


図 23: ジャイロイド極小曲面

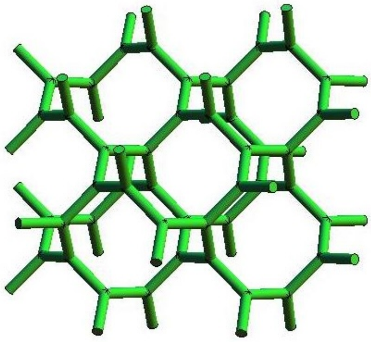


図 24: Laves グラフ

3　細胞の模様と極小曲面

これらの極小曲面と生物の細胞との関係を説明します．以後，Schwarz の極小曲面，その共役曲面，Gyroid 曲面をそれぞれ，D 曲面，P 曲面，G 曲面とよぶことにします．

次の図は，D 曲面，G 曲面，P 曲面を平面で切ったときの切り口の図です．

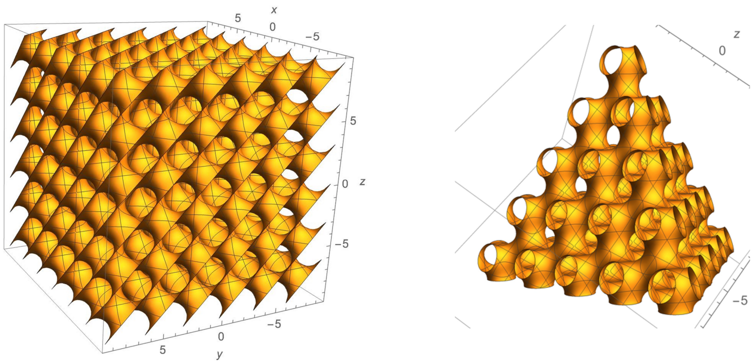


図 25: D 曲面とその平面切断

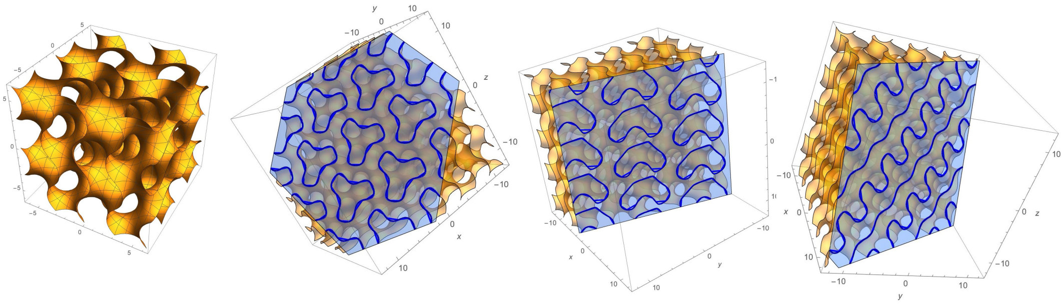


図 26: G 曲面といろいろな平面による切断

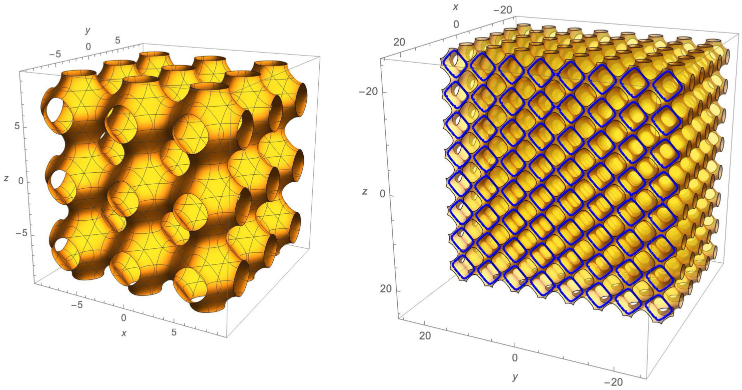


図 27: P 曲面とその平面切断

これらの切り口の模様を見ると，第 1 節で紹介した生物の組織に現れる模様と似ていることが見てとれます.

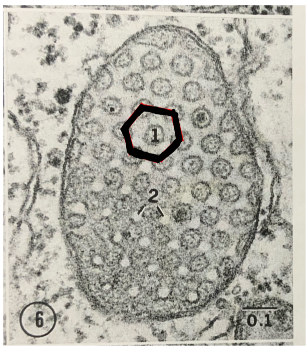


図 28: アフリカツメガエルのミトコンドリア

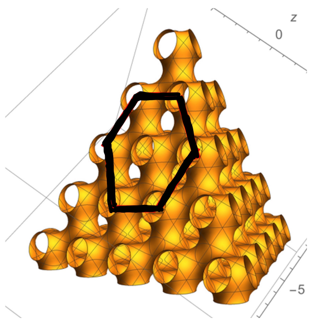


図 29: D 曲面とその平面切断

図 28 はカエルのミトコンドリアの写真ですが，ミトコンドリアの中に見える小さな丸い

組織は，一つの回りに 6 つの組織が正 6 角形状に並んでいます．その右の図 29 は D 曲面の切断面ですが，これにも同じ構造が見えます．

G 曲面をある傾きを持った平面で切断したときの切断線（図 31）は，ヤツメウナギの網膜色素細胞の模様（図 30）とよく似ています．

蝶の鱗粉の場合にも，シジミチョウの鱗粉（図 32）の上段 (C) の模様と，G 曲面の切断線（図 33）が類似していますし，アゲハの鱗粉（図 32 の下段 (F)）の模様と，G 曲面の切断線（図 34）が類似しています．ただし，これら G 曲面の平面切断線はそれぞれ違う法線ベクトルを持った平面によるものです．

P 曲面の切断線（図 36）はウロコムシの発光器（図 35）とよく似ています．

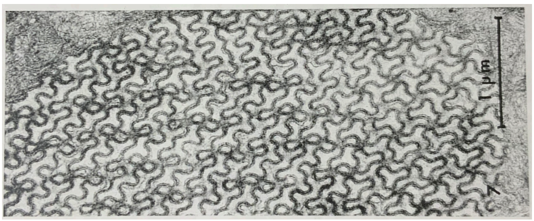


図 30: ヤツメウナギの網膜色素細胞

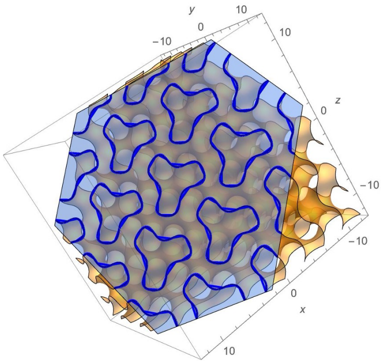


図 31: G 曲面の平面切断

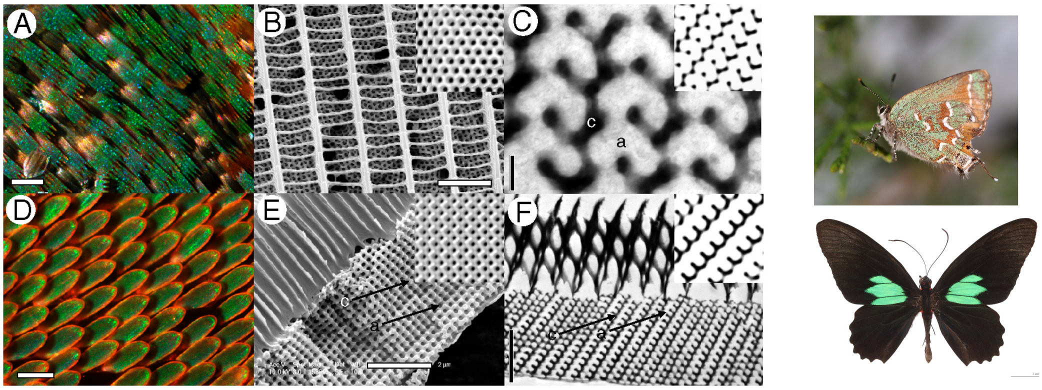


図 32: 蝶の鱗粉．上段：シジミチョウ，下段：マエモンジャコウアゲハ

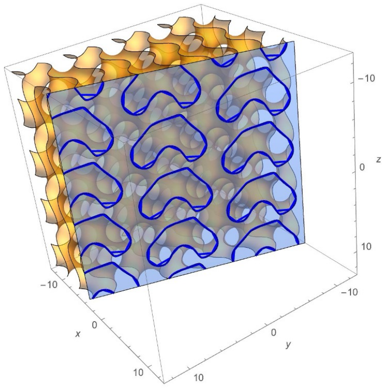


図 33: G 曲面の平面切断

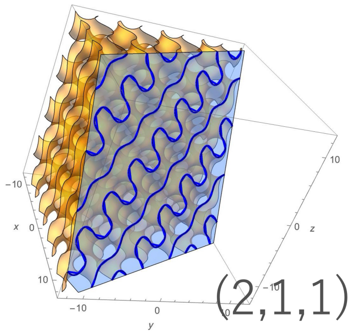


図 34: G 曲面の平面切断

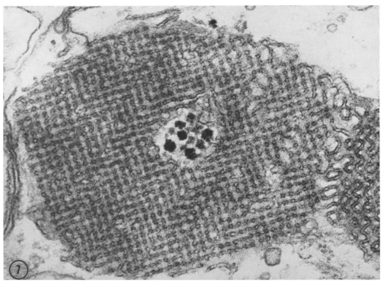


図 35: ウロコムシの発光器

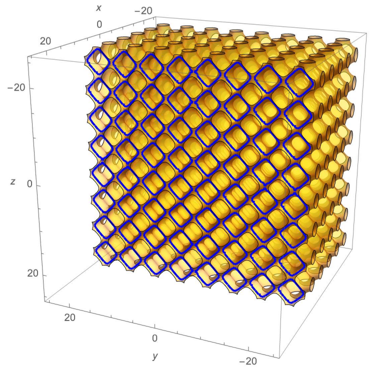


図 36: P 曲面の平面切断

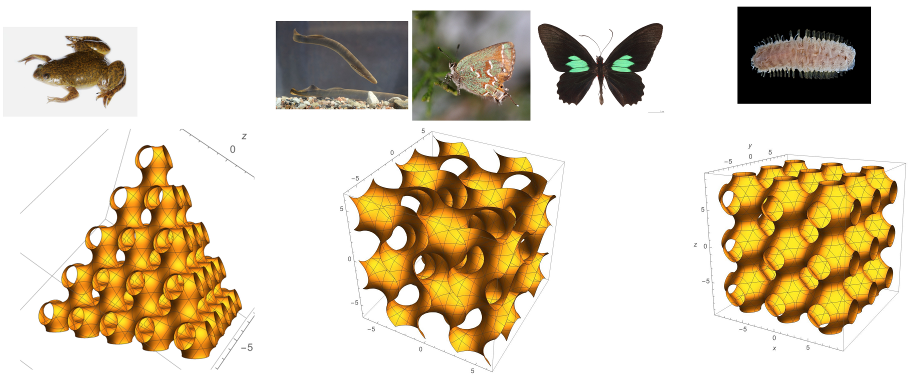


図 37: 細胞の界面と極小曲面

生物の組織は立体ですので，（電子）顕微鏡の写真はその切断面の様子を表しています．

いろいろな方向から組織の写真を撮って，これらの極小曲面の切り口と比べることで，これらの生物の組織の界面が，対応する極小曲面と同じ幾何学的構造を持っていると考えられています．

さて，ここに登場した3つの曲面は数学的にいくつかの特徴を持っています．

- 極小曲面であること．すなわち, この曲面上に小さな閉曲線をとるとき，これを境界に持つ曲面の中で，この曲面の面積が極小であること．
- 周期性を持つこと．つまり3方向に同じ形が繰り返し現れること．
- 高い対称性を持つこと．3次元空間の繰り返し模様は全部で230種類あることがわかっています．それらは空間群として分類されています（[ITC]）．D曲面，G曲面，P曲面の対称性を表す空間群の分類番号はそれぞれ，No.224，No.230，No.229であって，ほぼ最後の方に位置しており，もっとも複雑なものであることがわかります．

生物がこれらの幾何学的構造をとるということがどのような意味を持つのか，考え始めると興味が尽きません．

4　D曲面とP曲面の作り方

以上，3つの極小曲面を紹介しましたが，これらの曲面は立方体や正8面体と深く関係しています．

第2節では，空間4角形からD曲面を作りました．実は，D曲面は空間6角形からも次のようにして作れます．正6面体の辺を図38の左図（太線部分）のように選んで，空間6角形を作ります．この空間6角形を境界に持つ石けん膜を張るとD曲面になります（図38の中央および右図）．

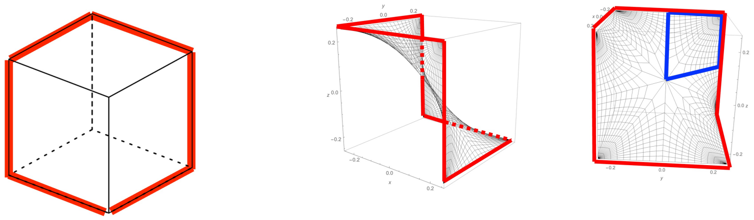


図 38: 空間6角形とD曲面

図39の黒塗りの部分が図38の右図の右上の枠で囲われた部分に当たります．

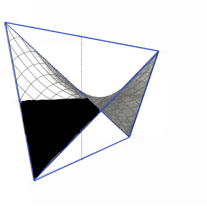


図 39: 正四面体と D 曲面

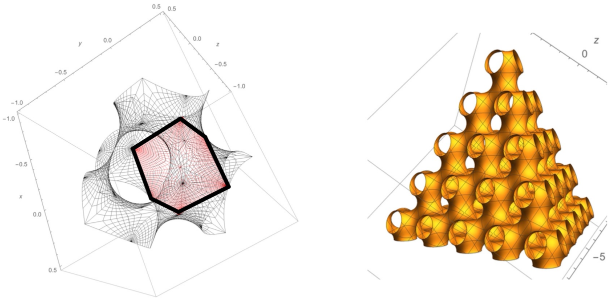


図 40: 空間 6 角形と D 曲面

次は P 曲面です．正 8 面体の辺を図 41 の左図（太線部分）のように選んで，空間 6 角形を作ります．この空間 6 角形を境界に持つ石けん膜を張ると，これが P 曲面になります（図 41 の中央および右図）．

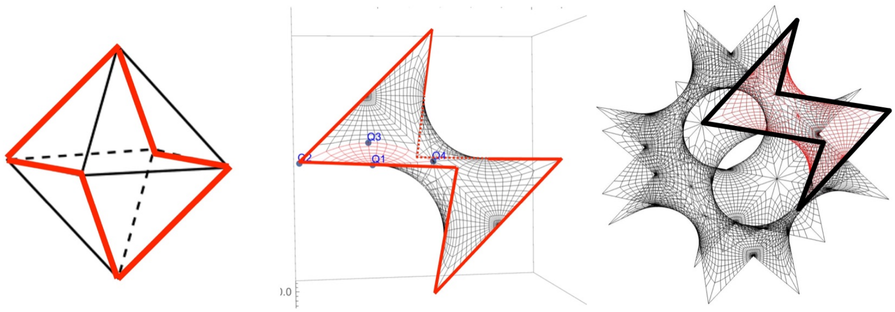


図 41: 空間 6 角形と P 曲面

5　D 曲面，G 曲面，P 曲面とオイラーの公式

G 曲面も空間 6 角形から作られるのですが，この 6 角形は辺が直線ではありません（図 42 の境界）．これを曲 6 角形とよぶことにしましょう．これを境界に持つ石けん膜を貼り合わせていくと G 曲面ができます．図 43 の濃いグレーの部分（カラー版（Web 版）では赤の部分）が曲 6 角形です．

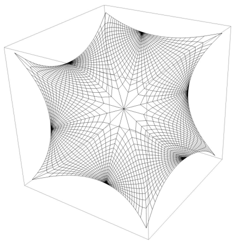


図 42: 空間曲 6 角形と G 曲面

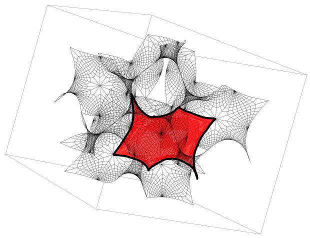


図 43:　曲 6 角形と G 曲面

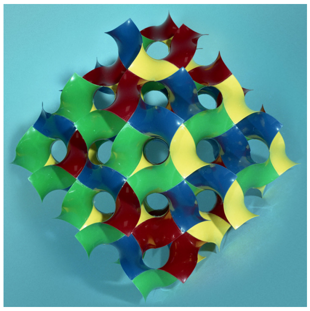


図 44: G 曲面

この曲 6 角形は D 曲面や P 曲面のように正多面体から簡単に作れません．複素数を使って D 曲面と P 曲面から以下のように作ります．

まず，曲面を平面から 3 次元空間への写像の像と見なします．さらにこの平面を複素平面 $\boldsymbol{C}$ と同一視します．

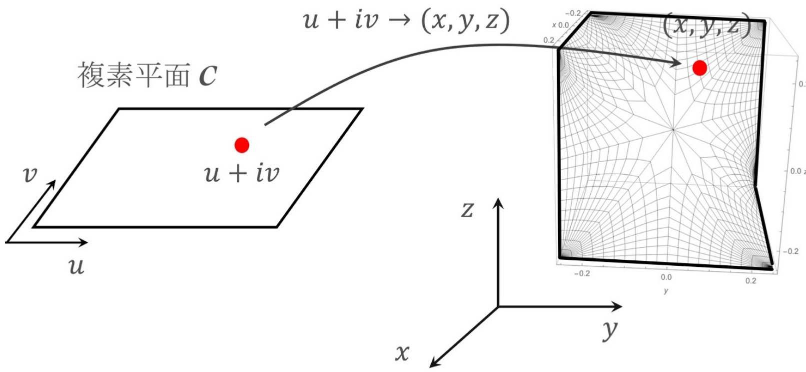


図 45: 複素平面から 3 次元空間への写像

この写像を，いちど複素数を経由して与える工夫をします．つまり 3 つの複素関数 $X(w), Y(w), Z(w)$ を用意して $\boldsymbol{C}^3$ への写像を与え，その実部をとることで曲面を与えます．

$$\boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3,$$

$$w = u + iv \mapsto (X(w), Y(w), Z(w)) \mapsto (x, y, z) = \mathrm{Re}((X(w), Y(w), Z(w))$$

ここで，Re は複素数の実部を取るという記号です．

さて，Schwarz の D 曲面を与える複素関数は次で与えられます．

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) &= \mathrm{Re}(X(w),Y(w),Z(w)) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^w \frac{(1-z^2)dz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}, \int_0^w \frac{i(1+z^2)dz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}, \int_0^w \frac{2zdz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

これはSchwarzが極小曲面のWeierstrass-Enneper表現を使って求めた式です（[Schwarz] vol. 1, pp. 1–125）．被積分関数には8個の極があるので，実際には$\sqrt{z^8-14z^4+1}$のリーマン面，すなわち種数3の超楕円曲線上で積分を考えることになります．ちなみに，この8個の極はリーマン球に内接する立方体の8個の頂点を立体射影で複素平面に射影したものです．この超楕円曲線は楕円曲線$y^2=x^4-14x^2+1$の二重分岐被覆になっているので，上記積分は第一種楕円積分で書くことができます．この積分の周期がこれら極小曲面の周期性を与えます．

$$
\begin{aligned}
\frac{x-y}{\sqrt{2}} &= -(2-\sqrt{3})\mathrm{Re}\left\{F((2+\sqrt{3})w'^2,k) - F((2+\sqrt{3})i,k)\right\} \\
\frac{x+y}{\sqrt{2}} &= -(2-\sqrt{3})\mathrm{Re}\left\{F((2+\sqrt{3})w''^2,k) + F((2+\sqrt{3})i,k)\right\} \\
z &= (2-\sqrt{3})\mathrm{Re}\left\{F((2+\sqrt{3})w^2,k)\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$F(w,k)$は第一種楕円積分

$$
F(w,k) := \int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},
$$

で，

$$
w' = \frac{1+\sqrt{i}w}{w-\sqrt{-i}}, \quad w'' = \frac{1+\sqrt{-i}w}{w-\sqrt{i}}, \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad k = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}
$$

です．

ここで，オイラーの公式

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta
$$

を使います．D曲面のWeierstrass-Enneper表現の式(1)の各成分に$e^{i\theta}$をかけて，各成分をθだけ回転させると新たに極小曲面が得られます．これをD曲面の随伴極小曲面とよびます．

$$
\begin{aligned}
(x_\theta, y_\theta, z_\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}(X(w), Y(w), Z(w))\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\left(\int_0^w \frac{(1-z^2)dz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}, \int_0^w \frac{i(1+z^2)dz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}, \int_0^w \frac{2zdz}{\sqrt{z^8-14z^4+1}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときを特に共役曲面とよびます．今の場合 D 曲面の共役曲面が P 曲面になります．

θ が

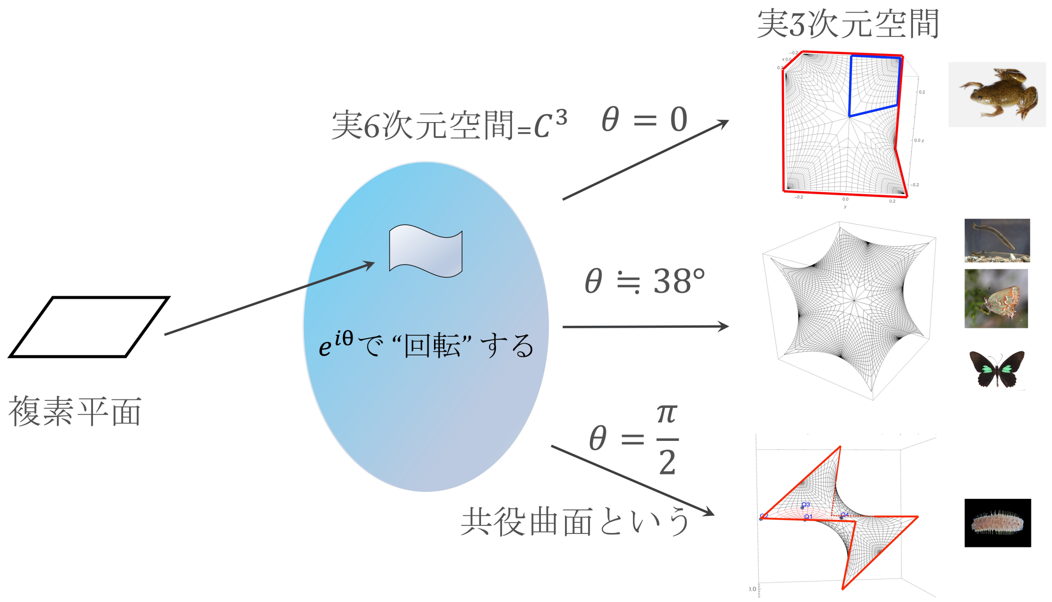
$$
\theta = \mathrm{arccot}\frac{K(\frac{\sqrt{3}}{2})}{K(\frac{1}{2})} \fallingdotseq 38.0148^\circ
$$

のときが G 曲面になります．ここで $K(k)$ は第一種完全楕円積分

$$
K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}
$$

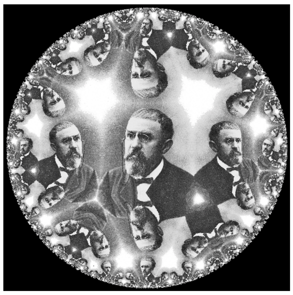
です．

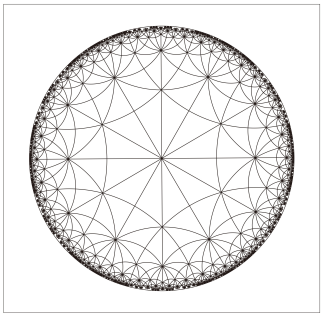
つまり，D 曲面，G 曲面，P 曲面は，$\boldsymbol{C}^3$ の中で成分毎の回転で繋がっていて，それを実空間 $\boldsymbol{R}^3$ に落とすとそれぞれの曲面になるというわけです．実は，回転角がこの 3 つの時，すなわち $0, \mathrm{arccot}\frac{K(\frac{\sqrt{3}}{2})}{K(\frac{1}{2})}, \frac{\pi}{2}$ のときだけ曲面は自交差がなく，他の角度のときは自交差が生じることがわかっています．



6　D 曲面，G 曲面，P 曲面の 等角地図 —ポアンカレ円盤

前節で極小曲面を与えるために用いたリーマン面は，リーマン面の一意化定理によって，ポアンカレ円盤をその普遍被覆としてもちます．





Popular Science Monthly, Volume 82, Public domain, via Wikimedia Commons
http://www.malinc.se/m/ImageTiling.php

図 46: ポアンカレ円盤

ポアンカレ円盤は非ユークリッド幾何のモデルの一つです．アインシュタインの特殊相対性理論における 4 次元時空を双曲面で切り取ったものでもあり，また，エッシャーの絵「サークルリミットシリーズ」でご存じの方もおられると思います。

ポアンカレ円盤上での幾何すなわち双曲幾何は次のような性質を持っています．

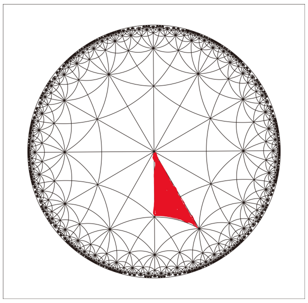
- “直線”は単位円の 直径か単位円に直交する円弧．
- “3 角形”の内角の和は 180 度より小さい．
- 平行線の公理が成り立たない．

図 46 の右の図は，ポアンカレ円盤に直線を書き入れたものです．このモデルでは角度はユークリッド幾何と同じです．3 本の直線で形成される 3 角形の内角の和が 180 度よりも小さいことが見てとれます．また，平行線の公理が成り立っていないこともこの図から読み取れます．

さて，この図の中のにある 3 角形はすべて 30 度，45 度，90 度の角度をもつ 3 角形です．そのうちの一つを取って，その辺に関して折り返すと隣の 3 角形に移ります．これを繰り返すことで，ポアンカレ円盤はこの 3 角形によって埋め尽くされています．

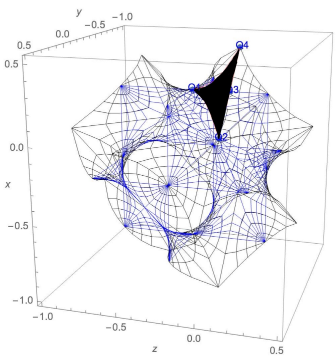
D 曲面，G 曲面，P 曲面は，$\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}$ のリーマン面の被覆となっているので，その普遍被覆であるポアンカレ円盤からそれら極小曲面への等角写像があります．このこと

からポアンカレ円盤は，空間に複雑に広がっているD曲面，G曲面，P曲面の等角地図と見なせるわけです．次図はポアンカレ円盤の3角形がそれぞれの曲面上の“3角形”に対応する様子を描いています．

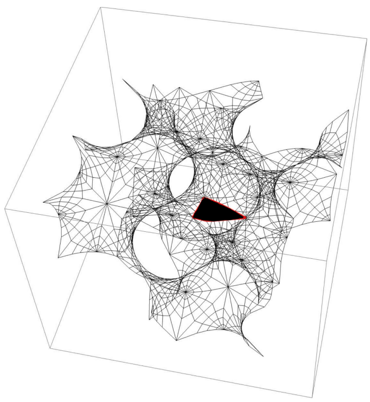


ポアンカレ円盤

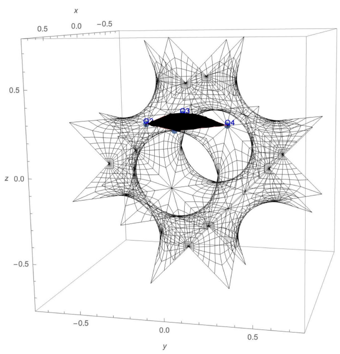
↙　　↓　　↘



D曲面



G曲面



P曲面

図 47: ポアンカレ円盤からの等角写像

ポアンカレ円盤とそれぞれの曲面との対応は，楕円積分やテータ関数を使って記述できます．テータ関数は惑星の運動や振り子の運動などを記述する関数です．

以上，生物の体内に見られる幾何学的構造についてご紹介しました．ここには対称性（群論），極小曲面（微分幾何学），楕円積分とテータ関数（解析学），双曲幾何学といった幅広い数学が互いに深く関連していて，とても興味深い数学があると思います．

参考文献

[Coxeter] H. S. M. Coxeter, On Laves's graph of girth ten, Canadian J. Math., vol. 7, pp. 18-23, 1955.

[ITC] M. I. Aroyo, Ed., International Tables for Crystallography, Volume A, Space-group symmetry, 6th ed., Wiley, 2016.

[Schoen1] A. H. Schoen, Infinite periodic minimal surfaces without self-intersection, NASA Techn. Rep. D-5541, 1970.

[Schwarz] H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen I, II, Springer, Berlin,1980.