

# 書 評

## 曲線と曲面

藤岡敦 著，裳華房，2023 年

横浜国立大学大学院工学研究院

本田 淳史

曲線・曲面論は長い歴史をもつ。Riemann が、3次元ユークリッド空間の曲面を基に多様体の概念を樹立するなど、現代に至るまで様々な場面で微分幾何学の発展において重要な役割を果たしてきた。とくに極小曲面は現在もなお、微分幾何学の中心的話題の一つであり、花形である。

本書は曲線・曲面論の入門書である。曲線・曲面論は微分幾何学の入門として、学部の専門科目として多くの大学で開講されており、それゆえ曲線・曲面論の入門書は数多く出版されている。その中でも、[1] 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何（改訂版）』（裳華房）や、[2] 梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面（改訂版）－微分幾何的アプローチ－』（裳華房）の2冊は曲面論の入門書の王道とされている。とくに [1] は、初等的なわかりやすさを重視しており、扱われている内容も「ガウス-ボンネの定理」と「極小曲面」という重要なものに絞ってある。また、[1] の技巧的な特徴として、動標構を用いた方法（moving frame method）が挙げられる。実はここが初学者には容易でないと言われる点でもある。これに対し、[2] は曲線・曲面論の大部分を網羅するような多岐にわたるトピックが取り扱われており、曲線・曲面論の標準的教科書にふさわしい内容がすべて盛り込まれた決定版、と謳われるほどである。

本書のトピックは、前半に曲線論、後半に曲面論、とくに「曲面論の基本定理、驚異の定理」を経由して、「ガウス-ボンネの定理」、そして最後に「極小曲面」という、選び抜かれた真に重要なものに絞ってある。また特筆すべき点として、[1] において初学者がつまづく可能性があった「動標構を用いた方法」も本書では用いられておらず、スムーズに読み進めることができる。本書は「超」入門書として紹介されており、その名にふさわしい内容になっている。

本書の特徴的な点を二つ紹介したい。まず一つ目は、本書は「手を動かしてまなぶ」シリーズの1つであることだ。「手を動かしてまなぶ」シリーズとは、裳華房から刊行されているもので、その名の通り手を動かしながら読む数学書のシリーズである。例えば、理解を深めるために演習問題を解く際に手を動かすわけだが、それ以外にも、数学書を読み進める上でしばしば必要になる「行間を埋める」際にも手を動かす。これらをサポートする

ために、様々な工夫が施されているのが「手を動かしてまなぶ」シリーズである。2024年7月現在で、線形代数、続・線形代数、微分積分、 $\varepsilon$ - $\delta$  論法、集合と位相、フーリエ解析・ラプラス変換、曲線と曲面、群論の合計8冊があり、本書の著者である藤岡氏はそのうち5冊を執筆している。「手を動かしてまなぶ」シリーズの特徴は複数あるが、そのうち特に紹介したいものとして、(A) ウェブを巧みに用いる点、(B) 図が多く用いられている点、(C) 要所にポイントがまとめられている点、がある。

(A) ウェブを巧みに用いる点について、読者自身で手を動かして解いてほしい例題や、読者が見落としそうな証明や計算が省略されているところにアイコンを設け、その具体的なやり方が、別冊「行間を埋めるために」でウェブ公開されている（「手を動かしてまなぶ」シリーズの裳華房のウェブサイトを参照）。例題や節末問題の丁寧で詳細な解答もウェブ公開されており、購入した書籍に留まらないサービスが人気の一つである。このように、「手を動かしてまなぶ」シリーズは自習書として読み進められるように配慮されており、本書もそのようになっている。したがって、微分幾何学に興味を持っている方にとって、まずはじめの一冊として本書を読むことが考えられる。それ以外にも、授業で曲線・曲面論を受講している方が、授業でわからなかったところなどを本書で補う、という使い方も十分に考えられる。このように、本書は読者に対する手厚いサポートが提供されている点で非常に優れている。

(B) 図が多く用いられている点について、幾何学の教科書であれば図が多いことは当然に思われるかもしれないが、幾何学においてつまずきやすいポイントは、図形から直感的に理解しがたい概念などにある。幾何学に限らず、初学者が数学を学ぶ際、新たな概念が登場する。それらは、過去の数学者らにより積み重ねられてきた経験や例に基づいたものであり、直感的に納得しやすいものばかりではない。それらを一旦理解してしまうと、不思議なことに個々の人にとって、当然の概念になってしまうことが多く感じる。このようなことから、入門書とされている教科書や本では、つまずきやすい点が流されていくこともある。本書は、それらのポイントを出来るだけ少なくする努力がなされており、とくに図を適切に用いることで、抽象的な概念の理解を助けている。

(C) 要所にポイントがまとめられている点について、これは評者が最も気に入っているところである。評者も授業をする際に、授業の初めに授業の内容を箇条書きでまとめ、終わりに授業の内容のまとめを紹介する。それらに加え、要所となるところで論理を整理するようなまとめも入っている。本書は、これらのことが書籍化されている。授業を受けているような感覚である。まさに、ここまで丁寧な記述があれば、自習書としても最適な一冊と感じる。

本書の二つ目の特徴として、線形常微分・偏微分方程式に関する説明が挙げられる。曲線論の基本定理は、曲線の合同類と曲率関数（空間曲線の場合は、曲率関数と捩率関数の

組) が 1 対 1 対応をもつことを主張する. 与えられた関数を曲率にもつ曲線の存在を示す際, 平面曲線の場合には明示的な積分公式が知られているが, 空間曲線の場合, そのような公式は知られておらず, 線形常微分方程式の解の存在定理を用いる方法が一般的である. 曲線・曲面論の入門書は, 微分方程式に関する記述が少なめのものが多い. 実際, 微分方程式に関する入門書は多数あり, 良書が多く知られている. それらの該当箇所を引用することで, 解析に関する説明を最小に留め, ページを少なくした分を幾何に関する内容に充てることがよくある. しかし読者, とくに初学者にとって, 引用されている本やその該当箇所を探して読むことは容易でないことがある. 評者は学生の時にその点を苦労した経験があり, 現在, 授業をする際にも, 微分方程式に関する説明にはある程度時間を割いて説明する. その点, 本書のような丁寧な説明があることは, 授業を受ける際や, 授業でこのような話題を解説する際には有難く感じる. 加えて, 曲面論の基本定理の証明には, 線形偏微分方程式の解の存在定理を用いるが, 本書では線形常微分方程式の解の存在定理を用いることで, 偏微分方程式の対応する定理を導いている. 実は, 評者が授業でこの内容を説明する際, 著者の藤岡氏のウェブサイトに掲載されていた講義資料を参考にしていただけだが, それが今回, 書籍にまとめられている. 評者以外の関係者からも, 藤岡氏のウェブサイト掲載の講義資料を参考にしているという話を聞いたことがあるため, 評者を含め, 本書は初学者, 授業の受講者, 授業を行う教員等, 様々な方にとって有用であると思っている. まさに, かゆいところに手が届くような内容が盛りだくさんである. (評者が学生の頃に本書があったら良かったと思う.)

本書評の初めに, 曲線・曲面論の入門書の王道として [1] 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』(裳華房) と, [2] 梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面 (改訂版) - 微分幾何的アプローチ』(裳華房) の 2 冊を紹介した. 本書は, 曲線・曲面の微分幾何学の「超」入門書という立場を取っており, まさにその通りの内容になっている. [1], [2] を含め, 本書では様々な書籍を適宜引用しながら進めており, 本書で学んだのちに次に進む方向も自ずと見えてくる. 微分幾何学の入門として曲線・曲面論を学ぶ際に, まず初めに手に取ることをおすすめしたい一冊である.