授賞報告
2024年度日本数学会代数学賞

2024年度日本数学会代数学賞は，浅芝秀人氏（静岡大学名誉教授），中村健太郎氏（佐賀大学理工学部教授）が受賞されました．

浅芝秀人氏「有限次元代数の表現論とその応用」

浅芝秀人氏は体上の有限次元代数の表現論を中心として研究を行ってきました．同氏の研究業績は多岐にわたりますが，ここでは三つの項目に絞って説明します．一つ目は有限次元代数の導来同値に関する研究で，同氏は90年代に世界に先駆けて有限表現型自己入射代数の導来同値による分類を与えました．二つ目は2010年代以降の研究成果で，導来同値分類で中心的役割を果たす被覆理論を昇華させた，2-圏論を用いた被覆理論と導来同値の研究です．三つ目はさらに近年のもので，位相的データ解析におけるパーシステントホモロジーへの表現論の応用です．

(1) 有限表現型自己入射代数の導来同値分類

導来圏はホモロジー代数学における基本的な対象です．二つの環の導来圏の同値性は傾複体と呼ばれる特別な複体の存在によって特徴付けられます（森田型定理）．その最も基本的な例は，quiver（箙）の鏡映によって与えられます．一般に，有限次元代数のクラスが与えられたとき，導来同値による同値類を理解することは重要な問題です．一例として，二つの箙 Q, Q' に対し，それらの道代数が導来同値である必要十分条件は，端点において鏡映を繰り返すことで Q から Q' が得られることです．有限次元代数が有限表現型であるとは，直既約加群の同型類の個数が有限個であることを意味します．道代数が有限表現型であるような箙は，ADE型のDynkin箙に他なりません（Gabrielの定理）．他によく調べられている有限次元代数のクラスとして，自己入射代数（Frobenius代数）が挙げられます．自己入射代数の導来同値を理解することは，有限群のモジュラー表現論におけるBroue予想との関連からも重要です．Brauer樹木代数と呼ばれる極めて特別な有限表現型の自己入射代数に対しては，Rickardによって89年に導来同値類の分類が与えられました．浅芝氏は99年の論文で，代数閉体上の有限表現型自己入射代数の導来同値類を完全に分類しました．この結果は80年代のRiedtmannらによる有限表現型の自己入射代数 A の分類理論を応用したもので，A の安定圏のAuslander–Reiten箙と呼ばれる組み合わせ論的不変量と，A は標準的であるか否か，という二つの情報によって，A の導来同値類を完全に決定します．応用として，二つの有限表現型自己入射代数の安定圏（近年では特異圏とも呼ばれる）が同値ならば導来同値であることが従い，特に安定同値類と導来同値類が一致します．以上の精密な分類結果は，国内外の専門家を驚嘆させるもので

した．浅芝氏の結果に追随する形で，多くの研究者によって様々な有限次元代数のクラスの導来同値類が調べられました．より一般の自己入射代数は浅芝氏自身や Skowronski, Holm を中心とするグループにより研究され，gentle 代数および Brauer グラフ代数と呼ばれる曲面の幾何学と深く関係する代数は，それぞれごく最近 Amiot–Plamondon–Schroll と Opper–Zvonareva によって導来同値類が完全に分類されました．このような一連の潮流を生み出す契機となった浅芝氏の研究成果は，高く評価されます．

(2) 2-圏論による被覆理論と導来同値

位相空間の被覆の類似として代数や加法圏の被覆が定義されますが，Gabriel の被覆理論は，被覆の関係にある二つの有限次元代数の表現の圏の間に関手を与えます．(1) で述べた分類では，浅芝氏自身による被覆理論の導来圏への拡張が重要な役割を果たします．浅芝氏は 2011 年の論文で，従来の被覆理論における群作用の自由性および圏の骨格性の仮定を落とすことにより，適用範囲を遥かに広範にしました．これを契機として同氏の研究は，被覆理論への 2-圏論の体系的な応用へと移行していきます．

可換環 k 上の線形圏 $\mathcal{C}$ に対する群 G の作用は単対象圏からの関手と見なせますが，浅芝氏はこれを擬関手に拡張した擬 G-圏 $\mathcal{C}$ に対し，軌道圏への標準被覆関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ が 2-普遍性を持つことを示しました．さらに擬 G-圏のなす 2-圏から G-次数付 k-圏のなす 2-圏への 2-関手 $-/G : G\text{-Cat} \to G\text{-GrGat}$ を構成し，その 2-擬逆が G とのスマッシュ積をとる 2-関手 $G\text{-GrGat} \to G\text{-Cat}$ であることを示しました（Cohen–Montgomery 双対の一般化）．更なる一般化として浅芝氏は，群 G を小圏 I に一般化し，擬 G-圏の軌道圏を colax 関手 $X : I \to \mathcal{C}$ に対する Grothendieck 構成 $\int_I X$ で置き換えた設定へと，上記の結果を拡張しました．また colax 関手に対する導来同値を適切に定義された傾部分圏の存在で特徴付ける（森田型定理）ことで，I 上の colax 関手の導来同値が Grothendieck 構成の導来同値を誘導することを示しました．以上の結果は，導来同値の貼り合わせにより新たな導来同値を生み出す強力な構成法を提供するものです．

(3) パーシステントホモロジーへの応用

パーシステントホモロジー（以下 PH）は位相的データ解析の主たる研究手法の一つであり，与えられたデータから位相空間のフィルトレーションを構成し，そのホモロジー群を取ることによって定義されます．構成から自然に PH は A 型箙の表現の構造を持ちますが，その直既約分解における各直既約加群の重複度を Auslander–Reiten 箙上にプロットすることにより，与えられたデータの形を捉えたパーシステンス図が定義されます．このような箙の表現論との関連が提示された 2010 年以降，世界的規模で PH への応用が研究されています．一つの重要問題として，2 パラメータ以上の場合への拡張が挙げられます．通常の PH は一つのパラメータでフィルトレーションを構成しますが，二つ以上のパラメータで構成する場合の PH は，複数の A 型箙の道代数のテンソル積代数の表現の構造を持ちます．この代数は一般には wild 表現型であるため，直既約分解の重複度を用

いてパーシステンス図を定めるのは実用的でなく，より適切な方法を見出すことが重要な課題となっています．2010 年代の後半から，浅芝氏は元学生の吉脇理雄氏，中島健氏らと共に，有限次元代数の表現論の研究者としては国内で初めて PH への応用研究を開始しました．当該分野の代表的研究者である平岡裕章氏のグループと共同で有限表現型 2 パラメーター PH を調べ，Auslander–Reiten 理論を用いたパーシステンス図の計算手法を与えました．さらに Auslander–Smalø の近似理論を応用したインターバル近似の概念を導入して，2 パラメーター PH の研究に応用しました．現在，インターバル近似は上で述べたパーシステンス図の適切な定義の有力候補として着目されており，また Lie 理論で重要な準遺伝代数との関連をはじめ，純粋に表現論的観点からも大変興味深いものです．

浅芝氏は，以上三つの研究以外にも，被覆理論の Gorenstein 類似や，初期の有限次元代数の local type に関する一連の研究，Ringel–Hall 代数による Lie 代数の実現，Brauer 樹木代数上の傾複体から生じる扇など様々な研究を行い，当該分野の指導者として幾つもの重要な成果を挙げてきました．さらに浅芝氏は，多数の国内外の若手研究者と共同研究を行うことにより，研究分野の発展に尽力され，また長年にわたり海外の研究者と活発に研究交流を行うことにより，国内の研究グループに大きな恩恵をもたらしてきました．静岡大学退職後も，京都大学高等研究院および大阪公立大学数学研究所に所属して，精力的に研究を行っています．以上のように浅芝氏の業績は代数学賞に誠に相応しいものです．

中村健太郎氏「階数 2 の p 進ガロア表現の岩澤理論の研究」

中村健太郎氏は, 局所体の p 進 Galois 表現を中心に研究を行っており, その研究やそこで培った技術を岩澤理論に応用し大変深い結果を出されています．特に一般岩澤理論に関する次の 2 つの仕事は非常に優れた業績です．

i) p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の任意の階数 2 の p 進表現の族に対し, 加藤和也氏の p-局所 ε-予想をほぼ解決したこと．

ii) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ に関する odd で絶対既約な 2 次元 mod p Galois 表現の普遍変形族に対して, 加藤和也氏のゼータ写像を一般化したこと．

いずれの仕事も 1 つの Galois 表現に対してではなく, Galois 表現の p 進変形族に対して, 基本的な対象を拡張するものです．そのために p 進 Langlands 対応やそれに伴う局所体の p 進 Galois 表現についての現代最高の技術が投入されており, これらに関する中村氏の理解の深さと腕力をもって初めて可能となる大変深い結果です．以下ではこれら 2 つの仕事に関してもう少し詳しく説明します．

有理数体上定義された代数多様体や保型形式など, 一般にモチーフと呼ばれる広範な対象に対して L-関数が定義され, 解析接続や関数等式の存在が予想されています．関数等式

に現れると予想される導手やルートナンバー部分は ε-因子と呼ばれていますが, 関数等式の存在予想とは独立に, Langlands や Deligne によってその存在が証明されています. ここで１つのモチーフに対してだけでなく, すべてのモチーフに対して, ε-因子が組織的に存在することが重要です. 実際, ε-因子の定義には関手性が内包されており, Weil の逆定理や局所 Langlands 対応の特徴づけなど, ε-因子の組織的振る舞いが Langlands 予想の重要な根拠になっています.

ε-因子はモチーフに伴う p 進 Galois 表現から定義できますが, p 進 Galois 表現が p 進族に拡張できるとき, ε-因子もその p 進族上に伸ばすことができるかというのは自然な問いです. またそれが p 進 L-関数など, その族に付随するゼータ関数的対象の関数等式を記述するかという問題も生じます. この問題は素朴にみえますが, ゼータ関数や ε-因子は本質的に複素数体上で定式化されるもので, そのような対象を位相の異なる p 進世界で変形させるためには, 背景にある深い現象を捉える必要があります. 例えば p 進 L-関数はモチーフの円分 p 進族でアーベル拡大上 semi-stable になる p に対してのみ存在予想が定式化されており, 他の場合は存在自体が謎です. また存在が証明されている場合も, 複素 L-関数の特殊値の間のある種の p 進合同性 (e.g. Kummer 合同) を発見証明することでなされ, 存在自体が大定理です. このようにこの問題は定式化自体が非常に難しく, 古典 ε-因子の存在のように, 基本的対象の存在性が背景に豊穣な数学があることを示唆するものです.

この問題と関連して, 90 年代から 2000 年代にかけて, 加藤和也氏は非常に広範な p 進 Galois 表現の変形族に対し, 一般岩澤主予想を定式化しました. ここでは簡単のため, p 進環とは, 冪級数環 $\mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_n]]$ 上の有限代数, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大などの対象を意味することにします. R を p 進環, T を階数有限の自由 R-加群で, Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用し, 有限個の素数を除いて不分岐なものとします. また素数 ℓ に対して $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ に制限したものを T_ℓ と書きます. 加藤氏はこのような T に対して「ゼータ関数的対象」とその関数等式を記述する ε-因子族の存在を予想 (定式化) しました. 加藤氏はモチーフの p 進エタール実現的世界に, 大域基本直線 $\Delta_R(T)$, 各素数 ℓ ごとに局所基本直線 $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ と呼ばれる R 上の直線束を定義しました. そしてそれらは実は canonical に自明化されることを予想しました. $\Delta_R(T)$ を自明化する canonical な写像をゼータ同型, $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ を自明化する canonical な写像を ℓ-局所 ε-同型, またそれらに対応する canonical な基底をそれぞれゼータ元, および ℓ-局所 ε-元と言います. (古典的な場合と同じく, 大域 ε-元は ℓ-局所 ε-元たちの素数 ℓ をわたる積として与えられます.) この自明化は, R や T に関して関手性を持ち, とくに基底変換と両立することを要求し, また R が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大のときは古典的対象と一致することを要求することで特徴づけられるものです. $\Delta_R(T)$ のこのような canonical な自明化の存在が一般岩澤主予想, $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ の自明化が局所 ε-予想, あるいは局所岩澤主予想と呼ばれています. このゼータ元はエタール実現的世界にいるため, その p 進族に付随する数論的不変量 (e.g. p-イデアル類群の族) をコントロールし, 一

方で Perrin–Riou 写像などの比較写像を通じて p 進 Hodge 実現されることで, p 進 L-関数などの解析的不変量をコントロールします．実際, ゼータ元の存在は canonical な Euler 系の存在と密接に結びついており, 技術的には Euler 系の理論が重要な役割を果たします.

ℓ-局所 ε-予想は $\ell \neq p$ のときは安田正大氏によって解決されました．このときは $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の位相と表現空間の p 進位相が異なるため比較的容易です．$\ell = p$ のときは, クリスタル表現の可換変形に関しては中村氏以前にも結果がありました．この場合は Perrin-Riou 理論の明示的相互法則の存在と大体同等で, 十分複雑で難しい場合ですが, 標準的な局所岩澤理論によって取り扱えるレベルです．中村氏は 2017 年 Algebra & Number Theory に掲載された論文においてクリスタル表現を含む trianguline 表現の変形に対して証明を与え, 同年 Cambridge Journal of Mathematics に掲載された論文においては驚くべきことに任意の p 進環上の任意の階数 2 の加群の場合をほぼ解決しました．「ほぼ」とついているのは, ε-同型が満たすべき条件のチェックが, いくつかの特殊化について抜けていたのですが, その後, Joaquin Rodrigues Jacinto 氏によって埋められました．クリスタリン表現の円分変形, さらには trianguline の場合は, ε-因子がガウス和を用いて簡明に書けることから, 本当に重要なのは non-trianguline の場合と言えます．この場合も扱っている中村氏の結果は真に革新的と言えます．中村氏の仕事の特徴は, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現を直接扱うのではなく, (φ, Γ)-加群という線形代数的対象を通して研究していることです．p 進表現の圏はエタール (φ, Γ)-加群の圏と圏同値ですが, (φ, Γ)-加群の方がより計算しやすく, 変形理論との相性もよいです．また trianguline 表現とは Galois 表現の圏では既約であっても, (φ, Γ)-加群の圏では, (エタールとは限らない) 階数 1 の (φ, Γ)-加群の逐次拡大として書けるものです．中村氏は p-局所 ε-予想を (エタールとは限らない) (φ, Γ)-加群に拡張することで, 階数 1 の場合に帰着する手法を取っています．また p 進 Langlands 対応は局所 Langlands 対応を (φ, Γ)-理論を経由して実現するものですが, これにより対応を torsion 係数や変形族に対して拡張できるようになります．そして p 進 Langlands 対応で移した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の保型表現の世界では, p 進 Kirillov モデルにより ε-因子を直接記述できることが証明の鍵になっています.

一般岩澤主予想に関しては, まずはゼータ関数の特殊値と関係する形で Euler 系を構成することが重要です．それにより主予想の半分の不等式がいえます．ただ Euler 系は発見すること自体が非常に難しく, 楕円型保型形式に対して加藤和也氏がそのような Euler 系を構成したのがこの分野の金字塔です．中村氏は 2023 年 Inventiones mathematicae に掲載された論文においてそれを普遍変形族に拡張しました．これによりある保型形式で主予想が証明できれば, それと mod p で合同な保型形式に対しても主予想がいえます．p で semi-stable であるような保型形式に対しては, Skinner–Urban らによって主予想が多くの場合に示されていますが, 証明では p 進 L-関数の存在が鍵になっています．p が semi-stable でないときは p 進 L-関数の存在自体が謎で, この場合の主予想を組織的

に研究する方法はありませんでした．しかしながら, p で non-semi-stable な保型形式は, semi-stable な保型形式と mod p で合同になるので, ゼータ元が p で割れないときは, 中村氏と Skinner–Urban らの結果から non-semi-stable な場合の主予想が証明できるという驚くべきことがおこります．中村氏の普遍変形族に対する Euler 系の構成方法ですが, Emerton の modular 曲線の completed cohomology を使います．これは modular 曲線の étale cohomology をすべてのレベルを動かして極限を取ってできるものです．自然な Galois 作用を持ちますが, すべてのレベルを走らせたことにより, レベル構造を通じて $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ などが作用し, Langlands 対応を実現する母体にもなります．この cohomology に普遍変形族が現れるというのが構成の出発点です．次に加藤の Euler 系を completed cohomology 上に伸ばすのですが, 様々な付加的選択物のある加藤 Euler 系を canonical なものするために大きな分母が必要です．そしてそれを普遍変形族部分に制限すれば適切な大きさにとどまることを示すのに様々な技術的な工夫をされています．また completed cohomology から普遍変形族部分を切り取り, 切り取られた Euler 系が特殊化に関して適切な性質を満たすことを示すところにも, p 進 Langlands 対応の深い理解と技術を必要とします.

このように中村氏の業績は様々な巨大理論の深い理解と高度な技術に基づくもので, 内容的にも根源的で今後の発展に多大な影響力をもつものであり, 代数学賞に大変相応しいものです.

（代数学賞委員会委員長　高木俊輔　東京大学大学院数理科学研究科）