会員ニュース

大槻知忠氏の令和５年度科学技術分野の文部科学大臣表彰科学技術賞受賞に寄せて

早稲田大学理工学術院
村上　順

京都大学数理解析研究所の大槻知忠氏が令和 5 年度文部科学大臣表彰科学技術賞を受賞されました．受賞の対象となった研究業績 は，「結び目と 3 次元多様体の量子不変量の研究」です．大槻氏は，これまでにも日本数学会春季賞や学術振興会賞などを受賞していますが，これらに加えて今回また名誉ある賞を受賞されたことを，心よりお祝い申し上げます．

研究業績にもあるように，大槻氏は量子不変量の研究に大きく貢献されていますが，それにとどまらず，量子トポロジーという新しい分野の確立にも大変尽力されています．ここでは，彼の主な仕事について振り返ってみたいと思います．

量子トポロジーという分野は，1980 年代半ばの結び目の Jones 多項式の発見を契機として生まれました．Jones 多項式は，結び目の不変量として有用であるだけでなく，作用素環や可解格子模型，さらには同時期に構成された量子群とも深く関係することがわかり，これらの性質を一般化することで，多くの結び目の不変量が構成されました．Jones 多項式を一般化した不変量は量子不変量と呼ばれ，量子不変量を生かしたトポロジーの研究を量子トポロジーと呼ぶようになったのです．

大槻氏が研究者としてデビューしたのは，この Jones 多項式の発見による盛り上がりが頂点を迎えた頃です．1990 年に京都で国際数学者会議が開催され，Jones 多項式の発見者である Jones や量子群の発見者の一人である Drinfel'd らがフィールズ賞を受賞しました．この直前には，大阪で低次元トポロジーに関するサテライト会議が開かれ，結び目の研究者が世界中から集まり，Jones 多項式に関係した研究も数多く発表されました．この頃から，こうした研究会などで大槻氏とよく顔を合わせるようになりました．

この頃までに，Jones 多項式から 3 次元多様体の Witten–Reshetikhin–Turaev (WRT) 不変量が構成されたり，結び目の有限型不変量という新しい不変量の見方が Vassiliev により提唱されたりしました．同じ頃，大槻氏は，Casson 不変量と WRT 不変量の関係を明らかにした村上斉氏の研究を一般化し，WRT 不変量から多項式不変量を構成しました．WRT 不変量は，自然数 r ごとに定義される数なのですが，これから，r によらない

不変量を導いたのです．さらに，有限型不変量の理論を 3 次元多様体に対して展開し，彼の多項式不変量がこの有限型不変量の例となることを示しました．これにより WRT 不変量と有限型不変量との関係が明らかになったのです．この頃の研究では，有理ホモロジー球面が，代数的に分離可能な絡み目の手術により得られる，という事実を積極的に用いていたことが印象に残っています．代数的に分離可能な絡み目とは，絡み目中の任意の 2 成分の絡み数がすべて 0 であるというもので，3 つの輪からなるボロミアン環が典型的な例です．この 3 次元多様体の有限型不変量の理論は，葉廣和夫氏のクラスパー理論へと発展しましたが，ここでもボロミアン環は基本的な構成要素となっています．

1992 年の第 1 回ヨーロッパ数学者会議で，結び目のすべての有限型不変量を構成する方法が Kontsevich により提唱されました．結び目に対し， Gauss 積分の一般化を反復積分を用いて定義し，そこから Kontsevich 積分と呼ばれる結び目不変量を構成したのです．これはコード図と呼ばれる図で展開される不変量で，各展開係数が有限型不変量となり，逆にすべての有限型不変量はこのような係数の 1 次結合で表すことができます．また，量子不変量は量子化のパラメータ q を持ちますが，$q=e^h$ として h で展開した時の展開係数も Kontsevich 積分から得ることができ，Kontsevich 積分は有限型不変量だけでなく，量子不変量に関しても普遍的な不変量となっています．

このKontsevich 積分を 3 次元多様体の不変量に拡張しようと考えるのは自然なことで，私を含め多くの人がこの問題に取り組んでいました．Kontsevich 積分の定義に使われているコード図の空間というのは，多くの構造を持つとても豊かな空間で，この性質をうまく使えば 3 次元多様体の不変量も構成できるように思えたのです．ちょうどこのとき，デンマークのオーフスで低次元トポロジーの国際会議があり，そこでこの問題について大槻氏と議論することができました．1995 年の夏のことです．大槻氏も同じようなことを考えていたようで，それほどたくさんの議論をしたわけではないのですが，どのようにしたら問題が解決できるかがわかったようです．そして，この問題に集中すると言って，実際数ヶ月もたたないうちに証明を与えました．これが 3 次元多様体の LMO 不変量ですが，さらに，これが有限型不変量について普遍的であることも示しています．有限型不変量に関する深い造詣により，多くの人が考えている問題にいち早く答えることができたのだと思います．

有限型不変量の理論や LMO 不変量は，3 次元多様体の新しい見方を与えました．有限型不変量により，ある次数までの有限型不変量が一致する 3 次元多様体は似たものと考えることができ，これにより 3 次元多様体全体にフィルトレーションを入れることができます．また，このフィルトレーションは，写像類群に対しても有用なフィルトレーションを誘導し，低次元トポロジーで広く使われる手法となりました．このような業績によ

り，1998 年に日本数学会幾何学賞を授与され，また，同年ベルリンで開催された国際数学者会議に招待されて，講演を行なっています．

大槻氏は，研究のみならず，この量子不変量を中心とした量子トポロジーという新しい数学を広げるためにも，大変積極的に活動しています．2001 年度に京都大学の数理解析研究所の年間プロジェクトで低次元トポロジーがテーマとなり，大槻氏もこのプロジェクトを進める主要メンバーの一員となりました．特に印象に残っているのは，9 月に行われた短期共同研究です．短期共同研究といっても，内容は国際会議といってもいいようなもので，多くの国から研究者が集まり，報告集も外国の出版社から出版されました．この報告集の後半部分には，大槻氏が中心となって作られた問題集が収められており，後に続く研究者のための貴重な道標となっています．

また，2002 年には LMO 不変量や有限型不変量についての解説も含む “Quantum Invariants. –A study of knots, 3-manifolds, and their sets” を出版しました．これは，量子不変量を学ぶための標準的なテキストとして，世界中で広く読まれています．

その後も，Kontsevich 積分のループ展開の理論を開拓するなど，Kontsevich 積分や LMO 不変量について精力的に研究を進めると共に，結び目の体積予想に関しても基本的な研究を行いました．体積予想とは，結び目補空間の単体体積が，その結び目の色付き Jones 多項式のある極限として得られる，という予想です．1996 年に Kashaev により，補空間の双曲体積と関係するとみられる結び目の不変量が構成され，村上斉氏と筆者により，この不変量が色付き Jones 不変量の一種であることが示され，予想もすべての結び目に対して一般化されました．これにより，色付 Jones 多項式と結び目補空間の双曲体積とが関係することが予想され，結び目の体積予想と呼ばれています．この予想は，8 の字結び目を含むわずかな例に対してのみ証明されていたのですが，大槻氏は 7 交点以下のすべての双曲結び目に対して証明を与えました．体積予想の証明での大きな障害は，鞍点法の適用可能条件をチェックすることでした．これに対し，幾何的に精緻な考察を行うことで適用可能条件を満たすことを示すとともに，和を積分で正しく表すために Poisson の和公式を用いたり，量子 2 重対数関数の性質を詳しく解析するなどして，体積予想の証明のための一つの標準的な手法を確立しました．

このように，大槻氏は絶えず量子不変量の最先端の研究を進めるとともに，2010 年から毎年 “Inteligence of Low Dimensional Topology” という研究集会を京都大学数理解析研究所で開催し，量子トポロジーという新しい分野の発展のため，そして低次元トポロジーの発展のため尽力しています．これからも多くの研究者の先頭に立って活躍されることと思います．改めて受賞をお祝い申し上げます．