

大島芳樹氏の令和5年度科学技術分野の 文部科学大臣表彰若手科学者賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科

関口 英子

大島芳樹氏（東京大学大学院数理科学研究科）が

実簡約リー群のユニタリ表現の研究

で令和5年度（2023年度）科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞を受賞されました。心からお祝いを申し上げます。以下では、この研究分野の最近の動向と大島氏の業績を紹介したいと思います。

リー群の無限次元表現論は20世紀前半から半ばにかけて、群論やリー群・リー代数や対称空間論などの数学分野と量子力学などの物理学の遭遇から始まり、関数解析学や微分方程式や可積分系の理論に新しい問題意識を提起し、また、逆にその進歩を取り込みながら大きく発展してきました。リー群の無限次元表現論は微分幾何や非可換調和解析、あるいは、整数論における保型形式の理論とも深いつながりがあります。

一方、表現論の内部では1980年代には解析的な要素を切り離した純代数的な表現論がVogan, Lusztig 等を中心に欧米で大流行し、多くの研究者がこの方向に進みました。この対極の立場として、小林俊行教授は表現論を単に代数的・組合せ論的なものとは捉えず、幾何学から古典解析を含む視野で表現論を捉え、新しい概念と表現論が進むべき今後の方向を次々と提唱され、約30年間にわたって、アメリカ・ロシア・フランス・デンマーク・ドイツ・アルゼンチン・オランダ・イスラエル・アラブ諸国等の研究者を率いて、世界的リーダーとして解析的表現論の新しい潮流を生み出してこられました。ただ、その理論を推進するためには最先端の深い数学の素養と広い視野が必要であり、著名な欧米の研究者が次々と日本発の小林理論の方向に進んだ一方で、日本にはそれができる若手がなかなか登場しませんでした。しかし、裾野が広い知識をもつ大島芳樹氏は小林理論の本質をつかみ、表現論の深い所で次々と良い成果を挙げ始めています。

今回の受賞対象となった大島芳樹氏の結果の主軸は無限次元表現の分岐則です。表現の分岐則とは、ある群の既約表現を部分群に制限したときに、どのように部分群の既約表現に分解するかを記述するものです。有限群の表現やリー群の有限次元表現の分岐則については古くから研究があり多くのことが分かっていますが、リー群の無限次元表現の場合、一般に部分群への制限は連続スペクトルを含んだり、重複度が無限になったりと、

はるかに振舞いが複雑になります。このため、無限次元表現の分岐則は、表現論の根本的なテーマであり、他分野への応用まで期待される重要な数学的対象であるにも関わらず、一般的な解析は極めて困難と思われていました。ところが1990年代に小林俊行教授によって、リー群の無限次元表現においても連続スペクトルが現れないような良い分岐則のクラス（正確には離散分解可能かつ重複度が有限となるクラス）が豊富に存在することが発見され、さらに離散分解可能であるための判定条件も超局所解析的アプローチと代数幾何的アプローチを組み合わせることによって証明されるというブレイクスルーが起りました (Invent. Math. 1994, Ann. Math. 1998, Invent. Math. 1998)。この離散分解可能な分岐則のうちで大きな部分を占め、判定条件が簡明な形になるのが Zuckerman 導来関手加群を実簡約リー群の対称対に関して制限するという設定です。大島芳樹氏の大きな業績は、このような設定で離散分解可能なクラスについて具体的な分岐則を調べたということです。

まず大島氏は無限次元の対称性の破れがいつ離散的に記述できるかについて、小林教授の基礎理論を用いて、それを組合せ論の問題に帰着させ、さらに、精緻な議論と工夫にみちた手法で分類理論を完成させました (小林俊行教授との二編の共著論文 Adv. Math. 2012, Crelle Journal 2015)。この二編の論文は、離散的分岐則という重要な概念が、具体的な設定において、いつ起こり得るかの完全な分類を与えたのみならず、その意味を明らかにしたものです。この分類理論は決定的な結果として歴史に残る論文と考えられます。実際、現在、大島芳樹氏の論文の中で一番引用数が多い論文と二番目に引用数の多い論文は、この分類理論であり、既に国際的にも大きな影響を与えています。また、この分類理論は表現論だけではなく、モジュラー多様体上の周期積分の消滅定理 (織田-小林の消滅定理) にも用いられます。大島氏はさらに Zuckerman の導来関手加群の分岐則の問題に対して D 加群を用いた研究 (単著, Amer. J. Math. 2015 他, 博士論文の一部) を開始し、続いて「Zuckerman 導来関手加群の対称対に関する離散的分岐則」に取り組みました。これは約10年をかけて300頁を越える論文で完成し、近々出版される予定です。その証明の主要部分は D 加群を用いることによって、部分多様体の幾何的な性質から分岐則を考察をするというものですが、実際に計算を実行するに当たっては、多くの困難を乗り越える必要がありました。

小林教授が30年前に「無限次元表現における分岐則の一般理論」を単独で構築し、そこに「宝の山」があることを小林教授自身が最初に“発掘”された後、Gross, Prasad, Wallach, Duflo, Vargas, Ørsted 等の世界の著名な表現論研究者が無限次元表現の分岐則の問題に次々と参入し、大域解析の手法、表現論的手法、測度論的な手法、シンプレク

ティック幾何の手法などを用いて、「分岐則の宝物」が次々と“発掘”されてきました。大島氏の精緻な結果は、この一連の流れの決定打となる業績です。

その他、大島芳樹氏は余随伴軌道の漸近挙動と波面集合に関する結果（Harris 氏と共同）、スーパーリー代数の表現論の結果（山崎氏と共同）などの興味深い結果も得られています。また、アーベル多様体のモジュライのコンパクト化について、尾高悠志氏（2020 年春季賞受賞者）が代数幾何的アプローチと微分幾何的アプローチを合わせて構成したものが、実は、佐武コンパクト化の 1 つであると大島芳樹氏は看破し、そこにリー群の深い構造との結びつきを見出し、特に数理物理・ミラー対称性の文脈で Kontsevich–Soibelman が $K3$ 曲面の場合に観察していた現象もそれに整合性があることを証明されました（尾高悠志氏との共著、日本数学会 MSJ Memoirs, 2021 年）。

大島芳樹氏は東京大学で博士号を取得された後、Kavli IPMU、プリンストン高等研究所、大阪大学を経て、2022 年に東京大学に戻って来られました。世界に一目を置かれる表現論の若手のホープとして、大島氏のますますのご活躍をお祈り致します。