

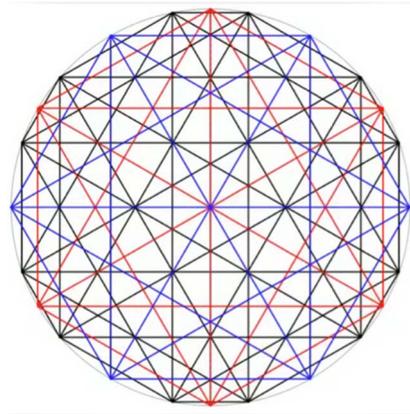
i の発見と波面の幾何学

東北大学大学院理学研究科名誉教授
宮岡 礼子

本稿は、2023年度日本数学会秋季総合分科会（東北大学）の市民講演会（9月23日）の記録である。一般の方々対象ということで、広く興味をもっていただけるよう、 i の発見から始めて、自分の研究の紹介も少しさせていただいた。当日使用したスライドをもとに述べるが、厳密性には目を瞑っていただきたい。図版などの転載については許可を得ている。なお数学会のホームページで講演ビデオが公開されている。さて、話の構成は次のとおりである。数と波面はどう関係するのだろうか？

数の話

1. 0 の発見
2. i の発見
3. ハミルトンと四元数
4. 八元数
5. クリフォード環



例外群 G_2 の軌道である S^3 の等径超曲面

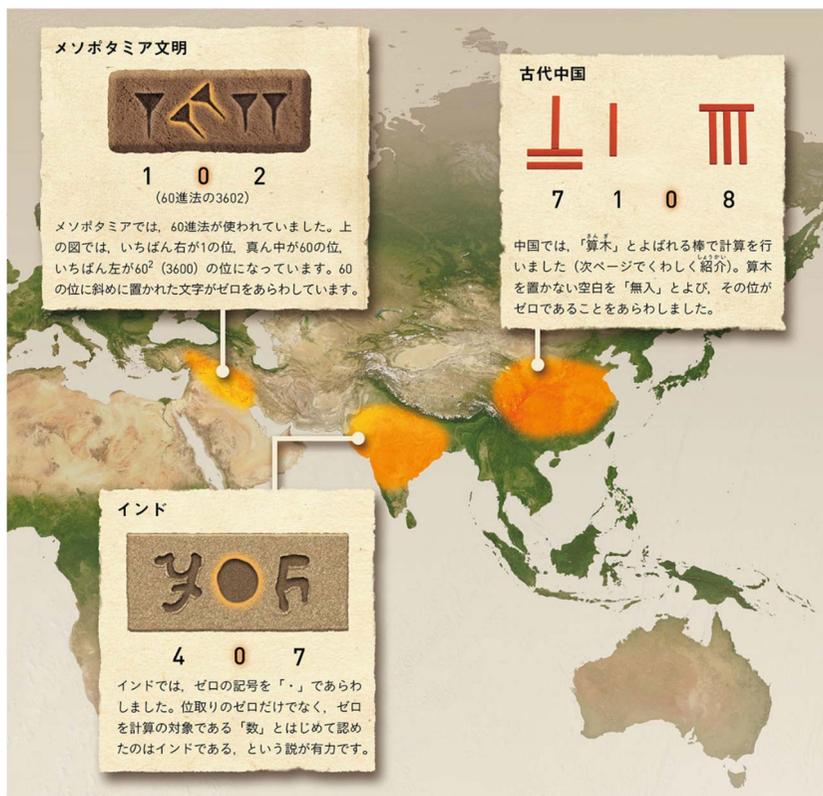
波面の話

6. 波面の幾何学
7. 球面の幾何へ
8. 球面の等径超曲面
9. Lie 接触変換
10. Dupin 超曲面

1. 0 の発見

- i の発見を述べる前に、やはり 0 の発見について少し述べるべきであろう。中国では紀元前 14 世紀に十進法を使用開始し、紀元前 4 世紀にはゼロを空位で表現した位取り記数法を使用した。紀元前 1 世紀には小数を用い、16 世紀欧州の数学者はそれを学び使用した。下図右上に算木（さんぎ）とよばれる数を表す棒が描かれている。赤棒で正の数、黒棒で負の数を表し、棒を動かして計算を行ったとのことである。何もないところが今でいう 0 を表している。

- 図の左上は BC 1800 年 バビロニア人の用いたいわゆる楔形の数字である。彼らは 60 進法を用い、桁が空く記号として \sphericalangle を用いたので、図で表されている数は 3602 となる。
- ギリシャ人は 0 を \circ (オミクロン) と記載したが、記号としてのみ使用し、計算には使われなかった。
- 数字の 0 はインドで生まれた。 ブラフマグプタ (628 年) は数字を抽象的に扱い、加減乗除のルールを負の数にまで拡張した。図の左下では 407 が記されている。
- イスラム (アッバース朝) : アル-フワーリズミ (780-850?) は、アルジャブルという著作を記した。これがアルジェブラ (代数) の語源、またアルゴリズムの語源にもなったとのことである。



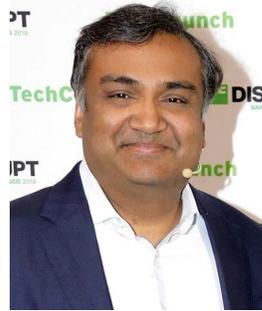
*科学雑誌 Newton 2020 年 1 月号 奇妙な数 虚数 より転載

余談であるが、最近のインド人の活躍にも触れよう。

- 大企業のトップには次のようなインド人がいる。



アルファベット (Google)
S.ピチャイ CEO



YouTube
N.モハン CEO



IBM
A.クリシュナ CEO



シャネル
L. ナイール CEO



Microsoft
S. ナディラ CEO

インドはグローバルサウスの立役者へ

- インドは 1947 年イギリスから独立した。
- 国土は日本の 9 倍、人口 14 億（15-24 歳：2 億 5 千万）で世界一位である。
- 30%が大学進学，理工系（数物化医学）志向が強い。トップはインド工科大学。
- 多様性（20-100 以上の言語があり，英語が共通言語）。
- VUCA: Volatility, Uncertainty, Complexity, Ambiguity

インド人はカオスで鍛えられる。

2. いよいよ i の発見へ

まず身近な数から

自然数 : 1, 2, 3, ...

整数 : ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

有理数 : $\frac{p}{q}$, p, q は整数, $q \neq 0$. これは有限小数か, 循環小数となる.

無理数 : 分数で表せない数, $\pi = 3.1415 \dots$, ネイピア数 $e = 2.7182 \dots$ など.

以上はまとめて実数とよばれ, 正でも負でも 2乗すると非負である.

実数全体を \mathbb{R} で表す “Real number” の \mathbb{R} である.

1次方程式 : $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) はいつでも解ける. $x = -\frac{b}{a}$

2次方程式 : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) は $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき実解をもつ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

他方 : $x^2 + 1 = 0$ は実解をもたない.

実は 虚数は 3次方程式を解くために導入された.

- 3次方程式の解を 2次方程式の解を経て得る公式がある.

カルダノの公式 (3次方程式の解の公式)

$$x^3 + px + q = 0$$

の解は, 以下の式で求められます。

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

p と q の値によっては, 上の式で色をつけた部分が虚数となり, 計算不能になります。

カルダノ (1501-1576) の方法

(発見者はタルタリア (1499-1557))

上の式には x^2 の項がないが、適当な変換でこのようにできるので、この形の 3 次方程式を考えれば良い。公式の $\sqrt[3]{\dots}$ は 3 乗根を表す。3 乗根の中にまたルートが含まれている。この公式の導き方は省略するが、興味があれば Wikipedia の三次方程式の項を参照していただきたい。

例 $x^3 - 15x - 4 = 0$ は $x = 4$ を解にもつ。

$\sqrt[3]{\dots}$ に入っているルートの中身はこの場合、

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3 = 4 - 125 = -121 < 0$$

なので、 $x^2 = -1$ の解 $\sqrt{-1}$ を i と書けば

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}. \end{aligned}$$

3 乗根は 3 つあるが (次の代数学の基本定理参照) , そのうちのひとつをとると、 $(2 + i) + (2 - i) = 4$ で上の方程式の実解を得る。冪根の求め方は複素数極表示のところで触れる。

代数学の基本定理

驚くべき事実は、 i を導入すると 2 次、3 次方程式ばかりでなく、すべての n 次方程式： $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) が解けることである。

つまり次が成り立つ：

代数学の基本定理 (ガウス, 1799)

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ($a_n \neq 0$) とすると、

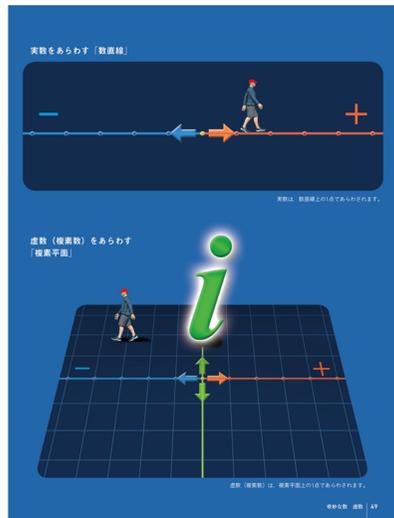
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

は重複度も込めてちょうど n 個の複素数解をもつ。

数直線と複素（ガウス）平面

17世紀、デカルトは（0の導入にも） $\sqrt{-1}$ の導入にも懐疑的で、これを“Imaginary number”（虚数）と名付けた（幾何学的意味がないとして）。

一方、実数を数直線で表すと、0や正負の数の様子が自然にわかる。



また数直線に垂直な方向を虚軸として追加することにより、複素数の様子も自然にわかる。これを複素平面，または考案者のひとりガウス（1777-1855）にちなみ、ガウス平面という。

このように視覚的に表すことにより、0も*i*も受け入れられるようになった。

オイラー（1707-1783）

1779年オイラーは $x^2 = -1$ の解 $\sqrt{-1}$ を*i*と記し、重要な結果をいくつも導いた。

$z = x + yi$ （ x, y は実数）と表される数を複素数という。複素数全体を \mathbb{C} で表す。“Complex number”の \mathbb{C} である。加減乗除に関して、複素数は実数と同じ性質をみだす。



余談：オイラーは1738年ごろより視力が低下し、1771年ごろ両目を完全に失明。計算はすべて頭の中で行い、子供が口述筆記で論文にした。現在、886編の論文が確認されており、5万ページを超える全集にまとめられ1911年から刊行されているが未完である。

ちなみに数学者が一生に書く論文の数は、年齢と同数までいけば相当のものである。オイラーがいかに偉大であるかがわかる。

オイラーの公式、オイラーの等式

複素数と指数関数、三角関数の関係を述べよう。

$e = 2.7182\dots$ をネイピア数*とすると、指数関数 e^x を次で定義する。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

これは収束する無限級数である。三角関数の級数展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

を用いると、

オイラーの公式 : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

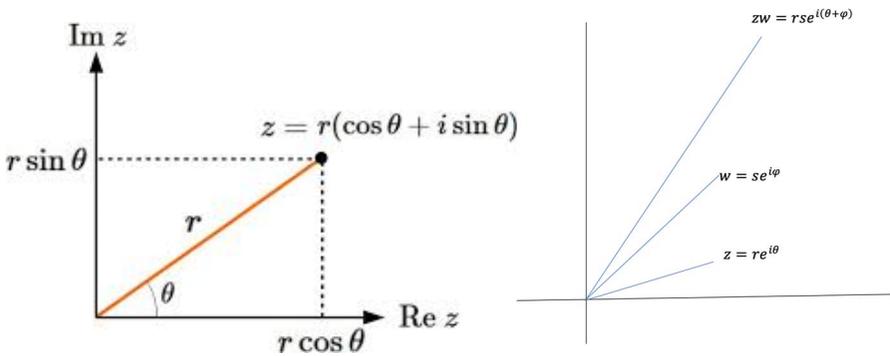
オイラーの等式 : $e^{i\pi} = -1$

を得る。したがって $e^{i\pi/2} = \sqrt{-1} = i$ であることに注意しよう。

* ネイピア数 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1618年、ネイピアにより自然対数の底として記述されたが、元はベルヌーイが複利計算のために使った数のようである。

数 II の復習：複素数の極表示と掛け算



複素数の極表示

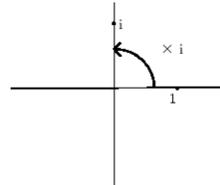
$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と表し、 $r = |z|$ を絶対値、 θ を偏角という。二つの複素数 $z = re^{i\theta}$ 、 $w = se^{i\varphi}$ の積は

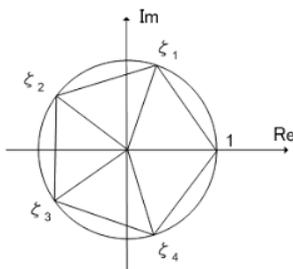
$$zw = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$$

つまり絶対値は積、偏角は和になる。

* 特に $i = e^{i\pi/2}$ だから、 z に i をかけることは、 z を $\pi/2 = 90^\circ$ だけ回転することである。
この事実は後で用いるので覚えておこう。



極表示を使って 1 の冪根、複素数の冪根が得られる。



$$n = 5$$

例： $\zeta^n = 1 : \zeta = e^{i\theta}$ と極表示すると、 $e^{in\theta} = 1$ より

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ であるから, } \zeta = e^{2i\pi/n}$$

とおけば 1 の n 乗根 ζ^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ を得る。

任意の複素数 α の n 乗根は $z^n = \alpha = |\alpha|e^{i\alpha}$ と

して、 $z = \sqrt[n]{|\alpha|} e^{i\alpha/n} \zeta^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ となる。

複素数の役割

数学的な役割に加え、複素数は多方面において大きな役割を果たしている。

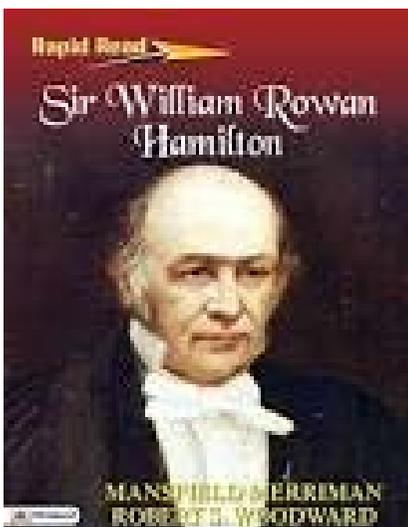
- 光学：物質による光の屈折率は実数，吸収率は虚数で表される。
- 天体力学：楕円軌道の周期は実数だが，双曲線軌道の周期は虚数で表される。
- 相対性理論：時間軸は通常の座標に i をかけたものと思える（アインシュタイン）。
- 超光速粒子タキオンがあれば，その質量は虚数である。
- トンネル効果：粒子の質量や速度は虚数である（ホーキング）。
- 量子力学：シュレディンガー方程式：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x,t) \right\} \psi(x,t)$$

が基本である。確率論を導入して量子コンピューターに発展した。

3. ハミルトン (1805-1865) と四元数

複素数よりもさらに広大な新しい数 四元数の発見：



ハミルトン（1805-1865）は虚数単位をもう一つ付け加え，三元数の構成を試みて失敗したが，2つ付け加えることにより四元数を発見し（1843），生涯の後半をこの研究に捧げた。

i, j, k を

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

をみたすものとするとき，

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$$

(a_0, a_1, a_2, a_3) は実数

を 四元数，または クオタニオン という。

- 四元数全体を \mathbb{H} (Hamilton の頭文字) で表す.
- 実数, 複素数と異なり 積は可換でない

$$ij = k = -ji \text{ など.}$$

\mathbb{H} で考えると, $x^2 = -1$ の 解は無数にある. 実際

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

なるすべての a_1, a_2, a_3 に対して $q = a_1i + a_2j + a_3k$ は $q^2 = -1$ をみたす.

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k = -ji$ などを用いて自分で確かめてほしい.

四元数の性質

$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ の 共役 \bar{q} と ノルム $|q|$ をそれぞれ

$$\bar{q} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k,$$

$$|q|^2 = q\bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

で定義するとき, q ($\neq 0$) の逆元は

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

となる. q で割ることは $\frac{1}{q}$ をかけることだから, \mathbb{H} では 割り算ができる.

\mathbb{H} は 多元体 (ラフにいうと, 加減乗除ができる数の集まり) である.

フロベニウスの定理 (1877)

\mathbb{R} 上の有限次元結合的多元体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のみ.

(ここに結合的とは, 積が $a(bc) = (ab)c$ をみたすこと.)

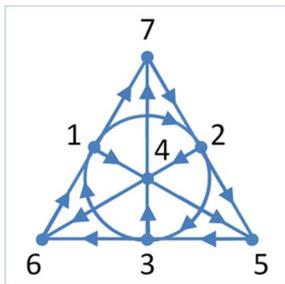
四元数の役割

- 複素数のときのように, i, j, k をかけることは異なる 3 方向への 回転を表すので 3次元の回転群 $SO(3)$ が深く関与する.
- 実際, 3次元の回転は四元数計算を用いると容易に表現できる.
- そこで, 四元数は, CG, コンピュータービジョン, ロボット工学, 制御理論, 物理, 生物情報, 分子動力学法, 軌道力学... で使われている.

4. 八元数

八元数はハミルトンの友人グレイブス (1843) , また独立にケーリー (1845) により発見された.

i, j, k に代わり $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を与えて, $j > 0$ のとき, $e_j^2 = -1$, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ の間の積は下の図で与えられるとする.



例えば, ひとつの線分 (円) 上の 3 つ組は矢印方向に,

$$e_6 e_1 = e_7, e_1 e_7 = e_6, e_1 e_4 = e_5, e_5 e_3 = e_6, e_1 e_2 = e_3,$$

などをみたく (逆向きは符号が変わる $e_1 e_6 = -e_7$ など) .

このとき

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$$

($x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ は実数)

で与えられる x を八元数, オクトニオン, またはケーリー数といい, その全体を \mathbb{O} で表す.

八元数の性質

八元数の積は非可換で, さらに一般には結合法則をみたまない.

$$a(bc) \neq (ab)c$$

他方, 四元数と同様に

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7$$

の共役とノルムをそれぞれ

$$\bar{x} = x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_4 e_4 - x_5 e_5 - x_6 e_6 - x_7 e_7,$$

$$|x|^2 = x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$$

で定めるとき, x ($\neq 0$) の逆元は

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

で与えられる. よって割り算ができる.

定義: ノルムが $|xy| = |x||y|$ をみたく多元体をノルム多元体という.

* $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ はノルム多元体である.

Q. では、同様にして 16 元数とか 32 元数…ができるか？

フルヴィッツ (1859-1919) の定理 (1898)

\mathbb{R} 上のノルム多元体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ のみである。

つまり、積の可換性や結合性はなくとも、上の性質をみたすノルムをもち、「加減乗除」ができる数は、 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に限られるのである。

八元数の役割は近年宇宙理論に関連していることがわかってきた。この話は最後にしよう。

5. クリフォード環

四元数と関連して、その拡張ともいえるクリフォード環を簡単に紹介する。ここでは、例を挙げて紹介するに留める。

\mathbb{R}^n の内積に関する正規直交基底 e_1, e_2, \dots, e_n から形式的に

$$e_1, e_2, \dots, e_n, e_i e_j, e_i e_j e_k, \dots, e_1 e_2 \dots e_n, \quad i < j < k \dots$$

の線型結合を考え、次の積関係

$$(*) \quad e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$$

をみたすものとしてクリフォード環を定める。

一般に割り算はできないので体ではなく環という。

ここで $n = 3$ として $i = e_2 e_3, j = e_3 e_1, k = e_1 e_2$ とおくと(*)から $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ がいえて四元数を得る。

自己同型の話

自己同型とは積と和の関係を保存する全単射写像のことである。

つまり、 A を多元体とすると、全単射写像 $g: A \rightarrow A$ が

$$g(ab) = g(a)g(b), \quad g(a + b) = g(a) + g(b)$$

をみたすとき、 g を A の自己同型という。

- \mathbb{C} の自己同型で \mathbb{R} を \mathbb{R} に移すものは複素共役のみ。
- 四元数の自己同型全体は $SO(3)$: 3次元回転群。
- 八元数の自己同型全体は、例外リー群とよばれる 5 つのうちの一つの G_2 である。これは 7次元回転群 $SO(7)$ の部分群である。
- クリフォード環からは $Spin(n)$ というスピノル群が現れる。

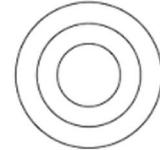
6. 波面の幾何学

さてここから波面の幾何学の話に移る.

講演では動画を使用したけど、ここでは画像の一部を掲載する.

今まで登場したいろいろな“数”は実は幾何学と関係している.

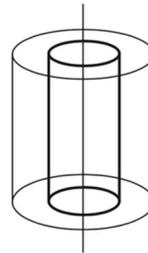
- 池に石を投げ込むと、同心円状の波が広がっていく.
- 針金から熱が出ると、円柱状の等温面が広がっていく.



ある波源から出る進行速度一定の波面を

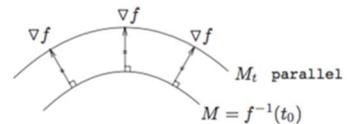
等径超曲面

という. 1920年代のイタリアの幾何光学者による研究が起源である. これらは平行超曲面族として現れる.

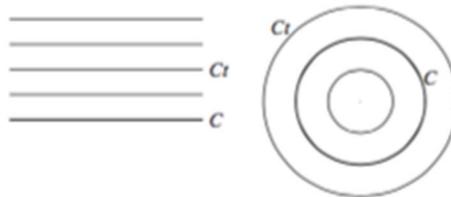


平行とは？

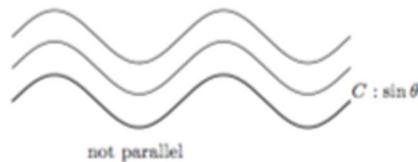
波面 M と M_t が平行 $\Leftrightarrow M$ と M_t の距離が一定



平行 \Rightarrow



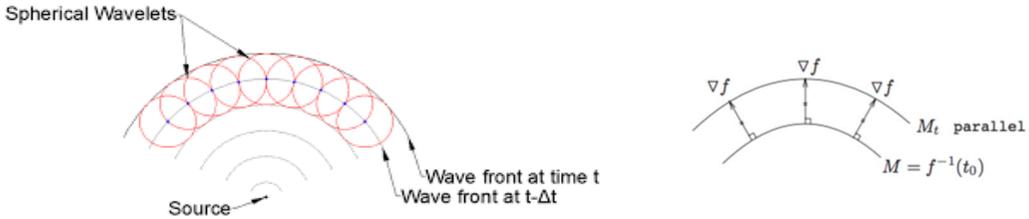
平行でない \Rightarrow



最後の図では、波面上の点の位置により、他の波面との距離が変わるので、波面は平行ではない.

ホイヘンスの原理

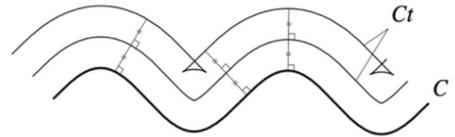
波面は波源の各点から一定速度で出る小波の包絡面として得られる。



等径超曲面の数学的な定義には深入りしないこととして、ホイヘンスの原理に従って進行する波面であると考えよう。

進行速度一定であれば、音波、熱波、光波など
なんの波面でもよい。

ただしどの波面も、右図のように折れ曲がったり、重なったりはしない、つまり平行超曲面が特異点を持つ場合は考えない。



$\mathbb{R}^n, S^n, (H^n)$ の等径超曲面

実空間 $\mathbb{R}^n (= E^n)$, 球面 S^n を考える。

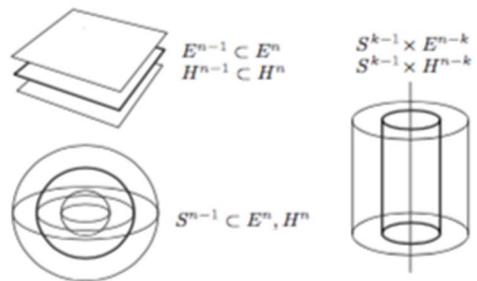
(双曲空間 H^n も同様に考えられるがここではふれない)。

\mathbb{R}^n の等径超曲面は、

同心超球面 $S^{n-1}(r)$ (超平面を含む) と

円柱面 $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$

のみであることが知られている。



ところが, 球面

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), |x| = 1\}$$

には、これらとは本質的に異なる無限個の等径超曲面が存在する。

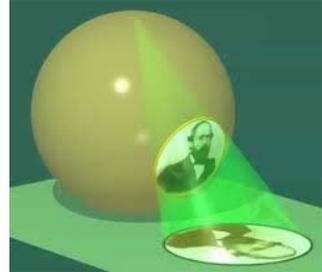
そこで以後 S^n の等径超曲面を考えよう。

7. 球面の幾何へ

- 複素平面 \mathbb{C} に無限遠点 ∞ を加えたものを $\widehat{\mathbb{C}}$ で表す。
 $\widehat{\mathbb{C}}$ は右図のように、2次元球面 S^2 と対応付けられる。

この S^2 をリーマン球面とよぶ。

- 実際、立体射影を知っていれば図のように S^2 と複素平面がきれいに対応している。
 この写真の人物はリーマン (1826-1866) である。



この対応で複素平面上の円（半径 ∞ として直線を含む）はリーマン球面上の円に対応する。これを円円対応とよぼう。

同様に、 n 次元実空間 \mathbb{R}^n に無限遠点を加えて $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \infty$ とすると、立体射影で $\widehat{\mathbb{R}^n}$ と n 次元球面 S^n を同一視することができる。

立体射影は共形変換（角を保つ変換）で \mathbb{R}^n の超球面は S^n の超球面に対応する。

以下では \mathbb{R}^n で考えていたこと（ユークリッド幾何）を S^n の中で考えてみよう。

8. 球面の等径超曲面

S^n 内をホイヘンスの原理で進行する等径超曲面を考える。その波源を 焦部分多様体 という。

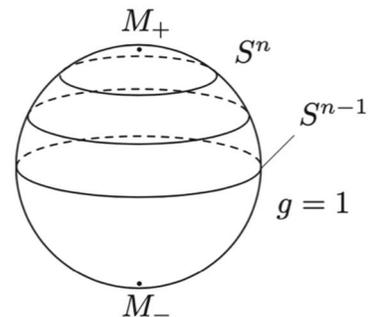
S^n の等径超曲面は 必ず二つの焦部分多様体 M_+ と M_- をもち、そこから発生する波面として与えられる。

例：超球面 $S^{n-1}(r)$ からなる同心球面族は

M_+ : 北極, M_- : 南極

から発する波面で、最も簡単な等径超曲面である。

各波面 $M = S^{n-1}(r)$ は超球面で、 M_+ (M_-) を芯として、膨らんで（縮んで）いき、 S^n を覆い尽くす（ \mathbb{R}^n の同心超球面に対応）。

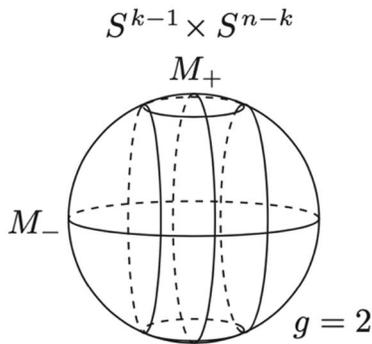


クリフォード 超曲面 (\mathbb{R}^n の円柱面 $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ に対応する)

S^n ($n \geq 3$)の超曲面 $M = S^{k-1}(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ は次に簡単な等径超曲面で、

$$M_+ = S^{k-1}(1), M_- = S^{n-k}(1)$$

を焦部分多様体 (波源) にもつ. これをクリフォード 超曲面という.



つまり M_+ の各点を中心とする球面が膨らんで行き、 M_- の点につぶれる.

$S^{k-1}(r)$ と $S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ は互いに他の直交補空間 \mathbb{R}^k と \mathbb{R}^{n-k+1} の超球面であり、1点以外では交わらない.

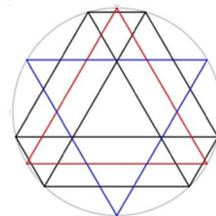
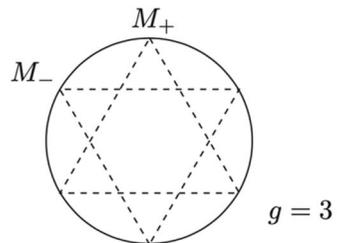
左図の様に、平行超曲面族が動いていき、 S^n を覆い尽くす.

鍵となる数は相異なる主曲率の個数 g である.

- 主曲率は定義しないが、 g は異なる曲がり方の種類と考えよう。
 \mathbb{R}^n では $g = 1, 2$ の場合しかない.
- S^n 内では、超球面 $S^{n-1}(r)$ は $g = 1$ (曲がり方はどこも同じ)
クリフォード超曲面 $S^{k-1}(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ は $g = 2$ (曲がり方は2種類)
 S^n には、さらに $g = 3, 4, 6$ をもつ等径超曲面が存在する.

$g = 3$: Cartan 超曲面.

- このとき M_+ , M_- は、射影平面、つまり FP^2 ($F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$) の S^4, S^7, S^{13}, S^{25} への標準埋め込みで与えられ、これらは Veronese 曲面とよばれる.
- ここに $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ が現れる.
- 特に、 M は等質で、**Cartan 超曲面**とよばれる.



等質とは正確には群作用の軌道のことであるが，ここでは直感的にどこから見ても同じ形に見える図形と考える．

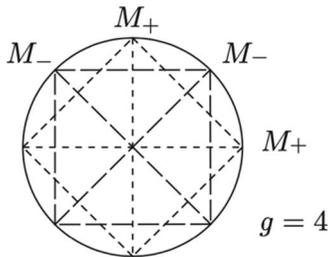
例：球面は等質，ラグビーボールは非等質である．

高次元球面内の等径超曲面は， $g = 3$ の図のように，超曲面の法線 (S^n では大円=法測地線という) の乗る平面に射影して表す．

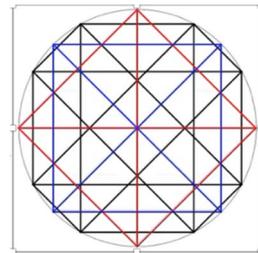
* グラフィックは 藤森祥一 広島大学教授による．

$g = 4$

- このときのみ，無限個の等質，非等質な等径超曲面が現れる．特に非等質な無限個の例が，尾関英樹-竹内勝により初めて発見された (1976) ．その後 Ferus-Karcher-Münzner により，等質な 2 例を除き，すべてクリフォード環の表現との対応が示されて (1987) ，これらは OT-FKM 型等径超曲面とよばれている．
- M_+, M_- の次元には無数の組み合わせがある．

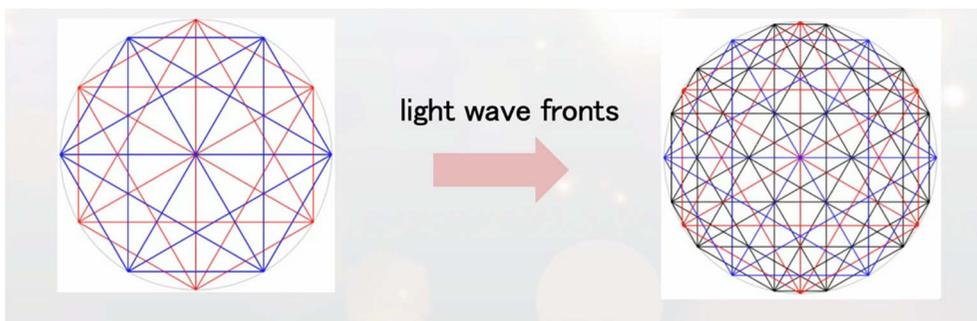


光の波面は M_+ の各点から発して，右図のように進行していく．



$g = 6$

- 二つの等質超曲面が S^7, S^{13} 内に現れる． S^{13} には八元数の自己同型群である例外群 G_2 の軌道 (等質) が現れる．



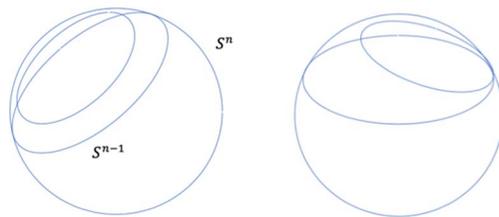
球面の等径超曲面の分類

- 等径超曲面は 1930 年代後半に、E. Cartan が統一的に研究を始め、代数、トポロジー、微分幾何、解析を総動員して、球面内での分類は 2020 年によく完成した (Cartan, Cecil-Chi-Jensen, Dorfmeister-Neher, 宮岡, Chi) . すなわち球面内の等径超曲面は上に述べたもので尽くされる. これは S.T. Yau の問題 (1994) の一つであった.
- $g=1, 2, 3, 4, 6$ のみであることには球面のトポロジーが深く関係している. 四元数, クリフォード環, 八元数の自己同型群などが現れることは偶然ではない.
- 波面の幾何学は本来, 物理の問題であり, 群軌道は可積分系理論にも関わり, 研究対象として自然なものである. 四元数や八元数に関わるもの, また群軌道に非常に近いのに等質ではないものがクリフォード環の表現から現れるなど, Lie 群論と多様体論をつなぐデリケートな対象である.

9. リー接触変換

超球面を超球面に移す (円円対応) 変換には, 角を保つ 共形変換 のほかに, 半径を縮めたり伸ばしたりする 膨張変換 がある. これらを合わせて リー接触変換 と言う. ただしこれは球面 S^n 上の変換ではなく, その単位接空間 US^n 上の変換と考えることが必要で, 高度な理論になるので, ここでは直感的に考えておく.

リーの接触変換により, 超球面 S^{n-1} は右図のように変換される. すると超球面が 1 点に移ることもあるので, この変換は S^n 上の点変換ではないことがわかる.

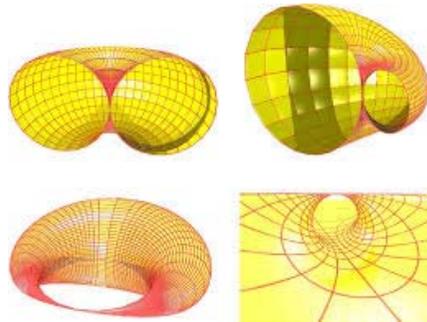
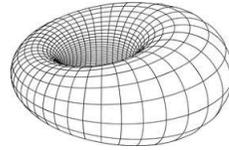


S^n のリーの接触変換群は \mathbb{R}^{n+3} の符号付き直交群 $O(n+1,2)$ で表される. これは共形変換群 $O(n+1,1)$ を部分群にもつ.

リーの接触変換が重要な役割を果たす **Dupin 超曲面** について以下に述べよう. これは S^n , \mathbb{R}^n , さらに双曲空間 H^n においても同様に論じられる対象であり, リーマン幾何学ではなく, リーの球幾何学とよばれる範疇の話になる.

10. Dupin 超曲面 (少し一般の波面)

- 等径超曲面にリー接触変換を施すとどうなるだろうか？
- 例えばドーナツの表面にリー接触変換を施すと、右図のように歪む。
*ドーナツは等径超曲面ではないが。
- このような超曲面を Dupin 超曲面 という。
- これは一定でない速度で進行する波面 と言って良い。



余談：筆者はリー接触変換の不変量を発見し (1989) , これを用いて Dupin 超曲面の分類に関する Cecil-Ryan 予想を解決し, 2001 年の幾何学賞を受賞した。

この不変量は 4 つの相異なる主曲率 λ, μ, ν, τ の複比 $\Psi = \frac{(\lambda - \mu)(\tau - \nu)}{(\lambda - \nu)(\tau - \mu)}$ で与えられる。

リー の球幾何は, 近年では離散幾何学や, 工学への応用で使われることがある。

少し専門的な話 (波面の幾何の別の役割)

- 完備非コンパクト多様体上の Ricci 平坦計量 は数理物理において重要で, Stenzel 計量, Bryant-Salamon 計量などが知られている。
- Bryant-Salamon 計量は, $g = 3$ の等径超曲面の位相と関係し, $S^7 \setminus S^3$ および, $S^7 \setminus \mathbb{CP}^2$ 上の計量である (宮岡, 2006) .
- これらは 特殊ホロノミー G_2 をもつ G_2 多様体とよばれる 7次元多様体 である。
- 等径超曲面の焦部分多様体の余法束や, その Gauss 写像の像は, 対応する空間の特殊 Lagrange 部分多様体となり, 一部, その フレアホモロジー が計算されている (入江博, 大仁田, H. Ma, 宮岡, 2016) .

余談：宇宙理論

- ハミルトン曰く、我々は 4次元の時空に住んでいる。四元数はこのことに関連している。
- 超弦理論：古典論では物質の最小単位は点であるが、実は弦（ひも）が最小単位？

すると我々の住む時空は 10次元。ここで

$$10 = 4 + 6$$

の6次元に当たるものはカラビ-ヤウ多様体と関係する。

また $10 = 8 + 2$ で、八元数で物質粒子と力の粒子が記述され、そこにひもが時間で動いてできる2次元が加わるという議論もある。

- M理論：弦 → 実は面が最小単位？

すると、我々の住む時空は 11次元である。ここで

$$11 = 4 + 7$$

の7次元分は ???

$11 = 8 + 3$ では、八元数に面が時間と共に動いてできる3次元が加わる ???

理論には例外リー群 E_8 , G_2 などが登場するが、まだまだ謎は多くどの理論も未完成である。2012年のヒッグス粒子の発見、さらなる未知の素粒子の存在も議論されていて（2023年8月13日付日経新聞）、検証不能な巨大エネルギーの話になっていくので、議論は永遠に続きそうである。

まとめ

0の発見、 i の発見、四元数の発見、八元数の発見と数の歴史は発展してきた。

「虚数」と名付けられて、始め無意味な数とも思われていた複素数は、代数学の基本定理で述べられたような、数学における土台を築く数となった上に、物理学の進展にも大きな寄与をして、量子力学に本質的に結びついた。

さらに四元数、八元数及びその自己同型群は、波面の幾何学のみならず、近年、弦理論、超弦理論、超対称性理論、ミラー対称性、M理論などの最先端の宇宙物理学を論じる上で見え隠れし、今後の発展が大いに楽しみである。

本講演で参照した文献等

- 吉田洋一『零の発見』（岩波新書 1979）
- 科学雑誌 Newton 2020 年 1 月号 奇妙な数 虚数
- 植田一石「複素数を超えて—四元数と八元数—」（2018）
- 横田一郎『群と表現』（裳華房 1973）
- 日経サイエンス 八元数と超ひも理論（2011-8）
- 宇宙物理に関しては次が興味深い（NHK オンデマンドで一部視聴可能）.
NHK スペシャル 神の数式 完全版（2013 年放送）
 - 第 1 回 この世は何からできているのか
 - 第 2 回 宇宙はどこから来たのか
 - 第 3 回 宇宙はなぜ始まったのか
 - 第 4 回 異次元宇宙は存在するか 超弦理論革命

論文

- R. Miyaoka, Isoparametric hypersurfaces with $(g,m)=(6,2)$, Annals of Math. **177** (2013), 53-110.
Errata of “Isoparametric hypersurfaces with $(g,m)=(6,2)$ ”, Annals of Math. **183** (2016), 1057-1071.
- H. Irie, H. Ma, Y. Ohnita, R. Miyaoka, Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces, Bull. London Math. Soc. **48** (2016), 802-812.
- R. Miyaoka, Dupin hypersurfaces and a Lie invariant, Kodai Math. J. **12** (1989) 228-256.
- R. Miyaoka and T. Ozawa, Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan conjecture, Geometry of Manifolds (ed. K. Shiohama), Academic press (1989), 181-189.