

会員ニュース

山下真由子氏の Maryam Mirzakhani New Frontiers Prize ・ フロンティアサロン永瀬賞特別賞受賞に寄せて

東京大学大学院数理科学研究科
河東 泰之

山下真由子さんが Breakthrough Prize Foundation の 2024 年の Maryam Mirzakhani New Frontiers Prize と、2023 年のフロンティアサロン財団の「フロンティアサロン永瀬賞特別賞」を受賞することになった。昨年の羽ばたく女性研究者賞 (マリア・スクウォドフスカ=キュリー賞) に続きたいへんおめでたいことである。この2つは相互に何も関係ないのだが、ほぼ同時に発表になったことから、まとめてこの記事を書くことになった。

Breakthrough Prize Foundation は Google の創設者の一人である Brin や、Meta (旧 Facebook) の創設者の一人である Zuckerberg などが設立したもので、数学、基礎物理学、生命科学でそれぞれ賞金 300 万ドルの Breakthrough Prize を出していることで知られている。2022 年に望月拓郎氏が数学部門の Breakthrough Prize を受賞したことは記憶に新しいが、今回発表になった数学部門の受賞者は Brendle であった。今回の基礎物理学部門受賞の Cardy と Zamolodchikov も数学者になじみ深い名前である。同財団はこれらのほかに、数学と物理学の若手賞 New Horizons Prize と、若手女性数学者の賞 Maryam Mirzakhani New Frontiers Prize も出しており、この後者が今回山下さんの受賞したものだ。これは 2020 年に発表が始まったもので、授賞発表の前年、前々年に博士号を取得した女性数学者 3 人に授与しており、賞金は 5 万ドルである。(山下さんは博士号無しに 2019 年に京大数理研の助教になっているが、その後東大数理で論文博士を取得したので、博士号取得は 2022 年である。) もちろんこの賞の名前は、女性初の Fields 賞受賞者となりながら、2017 年に 40 歳で亡くなってしまった Maryam Mirzakhani を記念したものである。山下さんの授賞理由は “For contributions to mathematical physics, index theory” であった。2024 年 4 月 13 日に Los Angeles で映画スターなどを集めた豪華な授賞式が行われるということである。

フロンティアサロン財団の方は東進ハイスクールなどを経営する企業ナガセがやっている、科学技術を対象とした若手向けの賞で、最優秀賞と特別賞があり、山下さんが受賞するのは后者である。これには 1,500 万円の賞金がついており、今回が第 13 回だが数学関係の受賞は初めてである。

昨年この『数学通信』に私が山下さんの受賞紹介記事を書いたばかりだが、その後も山

下さんは、2023年4月に27歳で京都大学理学部数学教室准教授になり、シンガポールの雑誌 *Asian Scientist Magazine* が選ぶ「アジアの科学者100人」にも選ばれるなど、その評価は高まるばかりである。数学ではこの100人には、Ngaiming Mok (香港), Yong-Geun Oh (韓国) なども選ばれている。京大数学教室准教授のポストは公募に出したのではなく、向こうからオファーされたとのことである。山下さんはポストが向こうから降ってくるので、これまで公募に出したことは一度もなく、これからも一生応募する必要はないと思われる。

前回の私の記事ではこれまでの経歴などについて詳しく書いたが、山下さんの数学的研究内容は、当初の非可換幾何学的内容から、代数トポロジーと数理論理学の関係にシフトしてきており、物理学者との共同研究も多くなっているため、今回は最近の研究内容について主に書くことにする。今回の授賞理由の後半の index theory の部分は、Atiyah-Singer 型の指数定理を指し、山下さんは一人で書いて2020年に *Comm. Math. Phys.* に出版した修士論文を初めとしてこのテーマについて多くの論文があり、lattice version の指数定理を示したり、物理学者と組んで mod 2 版の Atiyah-Patodi-Singer 型指数定理と物性物理学の新たな関係を見出したりしており、それも授賞理由の *Mathematical Physics* の部分になっているはずだが、最新の論文

Anderson self-duality of topological modular forms, its differential-geometric manifestations, and vertex operator algebras, arXiv:2305.06196.

(立川裕二氏と共著で79ページ)では、代数トポロジーと場の量子論との関係に新たな境地を切り開いている。これが現在までの最も優れた業績と考えられるので、以下これについて説明する。なお立川氏は言うまでもなく超弦理論の著名な研究者であり、また2016年にこの Breakthrough Prize Foundation の基礎物理学部門で New Horizons Prize を受賞している。(基礎物理学の New Horizons Prize では、これまでほかに笠真生、高柳匡、渡邊悠樹各氏の日本人受賞者が出ている。数学部門の New Horizons Prize には残念ながらこれまで日本人の受賞者はいない。)ただし、この論文(と下に説明する先行論文)はいずれも、Introduction 以外は数学的に厳密なスタイルで書かれた数学の論文である。

まず山下さんの、同じく立川氏との共著論文である

Topological modular forms and the absence of all heterotic global anomalies, *Comm. Math. Phys.* **402** 1585–1620 (2023).

が重要な先行研究である。これは超弦理論に現れる数学的問題を、代数トポロジーの手法で解決した論文である。以下の説明では簡単のため、多くの仮定や数学的形容詞が省略されていることを注意しておく。

ここで考えている、群 G を対称性に持つ $d+1$ 次元の場の量子論とはだいたい、適当

な幾何学的構造を持った, G -bundle 付きの d 次元多様体を object, それらの間の bordism を morphism とする圏から, Hilbert 空間を object, それらの間の線形写像を morphism とする圏への functor のことである. (これはあくまで「だいたい」であって, 期待すべきいろいろな要請を満たすような, 数学的に厳密な定義は現在存在していない.) こうして生じる Hilbert 空間の次元が常に 1 であるとき, この場の量子論は可逆であるという. 可逆な場の量子論たちには Hilbert 空間の tensor 積によって積の構造が入る. 群 G を対称性に持つ $d+1$ 次元の可逆な場の量子論について, 互いに連続変形で移れるものを同一視すると, この積構造によって Abel 群が得られる. この種の Abel 群は, 物性物理学の文脈で Wen らによって考えられたバージョンが, Symmetry Protected Topological (SPT) 相と呼ばれて大流行の話題となった. 現在ではこの Abel 群は, G の分類空間のある種の一般 cohomology 群で書けると考えられている.

一般に場の量子論には anomaly と呼ばれる量があり, これが消えていることが物理的に期待すべき性質である. この anomaly は数学的には, bordism homology の Anderson dual と呼ばれるある種の一般 cohomology 群の元として与えられると考えられている. (Bordism homology はある種の一般 homology 理論であり, Anderson dual は一般 homology 理論から一般 cohomology 理論を作る仕組みである.) ある種の 2 次元超共形場理論から, 量子重力に関係した場の量子論を作る heterotic string construction と呼ばれる物理的な構成があり, これによってできる場の量子論の次元は元の超共形場理論の central charge によって決まる. その anomaly が一般 cohomology 群の元として 0 になるか, というのが上記の論文のメインの問題である. このままだとこの問題は数学的に厳密な形になっていないのであるが, こうした構造が正確な数学に翻訳できるであろうという Segal-Stolz-Teichner の予想があり, これを用いるとこの問題を代数トポロジーの数学的な問題に書き換えることができる. すなわち, $\mathrm{TMF}^\bullet(X)$ から $(I_{\mathbb{Z}}\Omega^{\mathrm{string}})^{\bullet-20}(X)$ への自然変換が生じるのだが, これが 0 になるか, というのが数学的問題である. ここで X はパラメータのなす位相空間であるが, TMF は周期 576 を持つある種の一般 cohomology 理論であり, ある意味で, 通常 \mathbb{Z} 係数 cohomology, 実 K 理論 KO の「次のステップ」となるものである. TMF とは topological modular form の頭文字であり, 古典的な integral modular form のなす環との関連からこう呼ばれている. また, spin 構造のより高いバージョンである string 構造というものがあり, それから生じる bordism homology 群が Ω^{string} であり, さらにその Anderson dual が $I_{\mathbb{Z}}\Omega^{\mathrm{string}}$ である. これによって元々の物理的な問題は, 完全に代数トポロジーの問題になった. これを stable homotopy 論を用いて解決したのがこの論文である. この論文は物理学者から大きな注目を浴び, まだ出版されたばかりだが, すでに Google Scholar で 17 回引用されている. その多くは

物理学者による J. High Energy Phys. などの論文からのものである。特別な場合にこれが 0 になることを示した立川氏単独の先行論文があるが、こちらの共著論文について同氏は、「一般に解決するとは思っておらず、至極ビックリした。」と書いている。

さて次に本題の論文だが、まず上の論文の結果を次のように考える。上の結果は、

$$\alpha_{\text{string}} : \text{TMF} \rightarrow \text{KO}((q)) \rightarrow \Sigma^{-20} I_{\mathbb{Z}} \text{MSpin} \rightarrow \Sigma^{-20} I_{\mathbb{Z}} \text{MString}$$

という合成で得られる写像が 0 だということである。ここで、MSpin と MString は spin bordism 群と string bordism 群を実現する Thom スペクトラムである。ただし一般に、スペクトラムとは一般 cohomology 理論を homotopy 類で実現するある種の位相空間の列である。また TMF は一般 cohomology 理論 TMF を実現するスペクトラム、 $\text{KO}((q))$ は KO を係数とする Laurent 級数を実現するスペクトラム、 $I_{\mathbb{Z}}$ はスペクトラムのレベルで考えた Anderson dual、 Σ は suspension である。ここで $\text{TMF} \rightarrow \text{KO}((q))$ 、 $\text{MString} \rightarrow \text{MSpin}$ という写像があり、これから $\text{KO}((q))/\text{TMF}$ 、 $\text{MSpin}/\text{MString}$ を作ることができる。さらに α_{string} が 0 になっていることから、

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{spin/string}} &: \text{TMF} \rightarrow \Sigma^{-20} I_{\mathbb{Z}}(\text{MSpin}/\text{MString}), \\ \alpha_{\text{KO}((q))/\text{TMF}} &: \text{KO}((q))/\text{TMF} \rightarrow \Sigma^{-20} I_{\mathbb{Z}} \text{MString} \end{aligned}$$

の 2 つを構成することができる。これらの写像を調べることがこの論文の主目的である。特に後者が同型であるというのが主定理である。このことは TMF が Anderson dual の意味で self-dual であることを表していると考えられる。これが論文題名の最初の部分である。 $\alpha_{\text{spin/string}}$ と $\alpha_{\text{KO}((q))/\text{TMF}}$ は、微分幾何学と超弦理論の立場から興味深い性質を持っており、上記の主定理から多くの応用が得られる。たとえば、string 構造を持った多様体の bordism 不変量である Bunke-Naumann 不変量について多くの情報がわかる。また 2 次元超共形場理論の文脈でこれらの結果を考えると、正則頂点作用素超代数に関する予想が導かれる。立川氏は自身のウェブページにこの論文について、「こんなに予期せぬことだらけの面白い研究が出来たのは滅多に無いことだ。」と書いている。

今年の 4 月に私が京都で物性物理学の国際研究集会を開き、上にも出てきた MIT の著名な物理学者 Wen に講演してもらった。山下さんもこの集会で上記の結果について講演したのだが、それについて Wen は、「超弦理論に関連した高度な数学的内容だが、これからは物性物理学でもこのようなことが大事になって来るであろう」とコメントしていた。山下さんにはこれからも、数学と物理学の両方にまたがり、最高レベルの活躍を続けてくれることを期待している。