書　評

図解する整数論

—AN ILLUSTRATED THEORY OF NUMBERS—

Martin H. Weissman 著，安福悠 訳，丸善出版，2022 年

島根大学総合理工学部
青木　美穂

本書は, 2017 年に出版された M. H. ワイズマンの著書『AN ILLUSTRATED THEORY OF NUMBERS』の翻訳書であり, 序章と 3 つの部で構成される.

整数を見る （Seeing Arithmetic）
第 I 部 整数論の土台 （Foundations）
第 II 部 法での計算 （Modular Arithmetic）
第 III 部 2 次形式 （Quadratic Forms）

整数論の基本的なトピックが，一般的な整数論の入門書には無い，視覚的・幾何学的な表現で語られ，大学で学ぶ数学の予備知識無しで理解できるよう工夫されている．一般的な教科書では代数的議論のみで完結される証明が，本書では視覚的に理解でき，美しい幾何学的な挿絵とともに愉しめる．また，豊富な練習問題と幅広い歴史的背景に関する補足説明も嬉しい．ここでは，本書で扱われている多くのトピックの中から，特に印象に残った，第 II 部の「法の世界における力学系」を用いた平方剰余の相互法則の証明と，第 III 部のコンウェイの「トポグラフ」を中心に，本書の魅力について述べたい.

第 I 部（第 1〜4 章）は，整数の可除性を表すハッセ図を用いたユークリッドの互除法についての説明から始まる．その後，素数分布に関する結果や予想（グリーン・タオの定理，リーマン予想，ゴールドバッハ予想，メルセンヌ素数と完全数など）について解説した後，ディリクレの近似定理の証明をフォードの円（Ford Circle）を用いて視覚的に与えている．第 4 章では，ガウス整数とアイゼンシュタイン整数の性質について解説され，それぞれに対応する虚 2 次体の整数論が展開される．第 I 部の終わりは，ほぼ 一頁にわたり描かれた，絶対値（ノルムの平方根）が 50 以下の 1476 個のガウス素数の図と 2190 個のアイゼンシュタイン素数の図で締め括られる.

第 II 部（第 5〜8 章）では，法の世界における力学系（Modular Dynamics）の考え方が導入される．第 6 章，章末の歴史的背景では，この考え方がフェルマーによって使用

されていたことや，フェルマーの小定理，オイラーの定理，原始根の存在定理などのガウスやオイラーによる証明，現代に至るまでの素数判定法の歴史（これらのトピックは第 6 章で法の世界における力学系を用いた説明が与えられる）が順を追って説明されていて興味深い．第 8 章では，平方剰余の相互法則の証明が与えられる．ガウスなどによる数多くの証明と比較しながら読むと面白い．本書の証明は，3 種類のブラケット記号によるラベリングを巧妙に用いている．以下簡単に証明の概略を述べる．p と q を相異なる奇素数とし，pq 羽の鳩（Pigeon）を用意する．これらの鳩それぞれに 3 種類のラベル $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ ($a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $b \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$) を貼る（詳細なブラケットの意味については本書第 8 章参照).　そして，pq 羽の鳩の置換 α, β, γ を以下で述べるように定義する．置換 α はラベル $[a, b]$ が貼られた鳩をラベル $\langle a, b]$ が貼られた鳩に写し，置換 β はラベル $[a, b]$ が貼られた鳩をラベル $[a, b\rangle$ が貼られた鳩に写す．また, 置換 γ は $\gamma \circ \alpha = \beta$ で定義する．法の世界の力学系を用いると, それぞれの置換の符号が $\mathrm{sgn}(\alpha) = \left(\dfrac{q}{p}\right)$，$\mathrm{sgn}(\beta) = \left(\dfrac{p}{q}\right)$，$\mathrm{sgn}(\gamma) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ であることが示せ，これにより平方剰余の相互法則が得られる．力学系の考え方を用いた符号の計算については, $p = 5$, $q = 3$ の場合の図が補足されており，証明の理解を視覚的に補助している．

第 III 部（第 9〜11 章）では，J. H. コンウェイの『トポグラフ』として知られる 2 次形式の視覚的アプローチについて，詳細に解説されている．はじめに, コンウェイの著書[1]『The Sensual （Quadratic） form』（Carus Mathematical Monographs, Series Number 26）の内容に沿って, 各領域を逆向き付き原始ベクトル (Lax Primitive Vector, コンウェイにより導入された，互いに素な整数 x, y に対し定義される逆向き付きベクトル $\pm(x, y)$ のこと．コンウェイが用いた『Lax』という単語を本書では明確に『逆向き付き』と訳している) でラベル付けしたトポグラフ『平面のトポグラフ』(Domain Topograph）が導入され，その連結性の証明が挿絵を用いて説明される．その後平面のトポグラフは, 整係数 2 元 2 次形式 Q を一つ選び，ラベル $\pm(x, y)$ を Q に代入した値 $Q(\pm(x, y))$ （プラス・マイナスどちらのベクトルでも同じ値になる）で置き換えたトポグラフ『値のトポグラフ』(Range Topograph）に描き換えられる．この地形図（Topograph）の境界線上には坂道のとき（値が増加するとき）増える向きに沿って矢印（←）が描かれる．また地形図には，各領域に記された値が正，負，0 のいずれの値をとるかによって，井戸[2]（Well)，湖 (Lake)，川（River)，蛇行点（Riverbend) などの水面（みなも）が出現し，2 次形式ごとに異なる情景が拡がる．湖は 2 次形式で 0 が表されるときに出現し，川は正の値と負の値

[1]小関道夫氏による書評（雑誌『数学』，2008 年 60 巻 3 号，p. 319–323）がある．

[2]コンウェイの著書『The Sensual （Quadratic） form』の翻訳書『素数が香り，形がきこえる』（細川尋史訳，新装改訂版は『目で見る 2 次形式―コンウェイのトポグラフ―』）では,『湧きだし口』と表現されている．

の境界に流れる．例えば，不定値 2 次形式 $Q(x, y) = x^2 - y^2$（判別式 4）の地形図には，$Q(\pm(1, 1)) = Q(\pm(1, -1)) = 0$ の 2 領域に湖が出現し，この 2 領域の間には川が流れるが，正定値 2 次形式 $Q(x, y) = x^2 - xy + y^2$（判別式 -3）の地形図には湖や川，蛇行点は一つも存在せず，唯一つの井戸があるような乾燥地帯，不定値 2 次形式 $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$（判別式 12）の地形図には湖は存在しないが，際限なく続く周期的な川（Endless Periodic River）がある豊かな地形，といった具合である．一般に，正定値 2 次形式の地形図では井戸が唯一つ存在すること，湖の数は，2 次形式の判別式の値が，平方数でないとき，0 のとき，平方数のときの場合分けに従いそれぞれ 0, 1, 2 個出現すること，判別式が正の非平方数ならば際限なく続く川が出現すること（この終わりのない川の存在により，ペル方程式の整数解の無限性が導かれる）などを本書ではトポグラフの性質を用いて証明している．井戸（上り坂のみで囲まれた凹んだ箇所）と蛇行点（川が曲がる箇所）は地形図の目印（Landmark）であり，コンウェイによる 2 次形式の視覚的アプローチにおいて重要な役割を果たす．古典的なガウスの 2 次形式論に現れる「簡約形式」の個数の有限性から類数の有限性が導かれるが，トポグラフでは 2 次形式が簡約であることが，正定値のときは井戸，不定値のときは蛇行点を用いて特徴づけられる．しかし，正定値の井戸は唯一つ存在することに対し，不定値の蛇行点は複数存在することなどから，正定値 2 次形式のトポグラフより不定値 2 次形式のトポグラフの方が複雑な地形をしていることが分かり，虚 2 次体と実 2 次体の類数を求めることの難易度の差を示唆している．

本書には，最新の研究や計算機を用いたデータの可視化も随所に織り込まれており，研究者にとっても有益な情報を多く含む．第 III 部，第 10 章では，絶対値が 11000 以下の基本判別式をもつ正定値 2 次形式の同値類の数（虚 2 次体の類数）を平面上にプロットした図を用いて，Y. Lamzouri, X. Li, K. Soundararajan らによる一般リーマン予想を仮定して得られた虚 2 次体の類数の上界と下界に関する明示的な結果（Math. Comp. 84 (2015)）を解説している（彼らの結果は一般の原始的ディリクレ指標に対する L 関数の $s = 1$ における新しい上界と下界を与えたものである）．また，第 III 部，第 11 章では，10000 以下の基本判別式をもつ不定値 2 次形式の同値類の数（実 2 次体の狭義類数）と蛇行点の数をプロットした図を比較し，H. Cohen，H. W. Lenstra, Jr. らにより提示された実 2 次体の類数の割合に関する予想『Cohen–Lenstra Heuristics』（Lecture Notes in Math., vol. 1068 （1984））に触れている．

原書には一般的な数学書とは異なる英語表現も多く見られるが，本書はそれらの表現が，原書のもつ鮮やかさを保ちながら，適切な日本語に置き換えられいる．幅広い読者が整数論の美しさを視覚的に理解することができる貴重な一冊である．