

書 評

フリーズの数学 スケッチ帖

—数と幾何のきらめき—

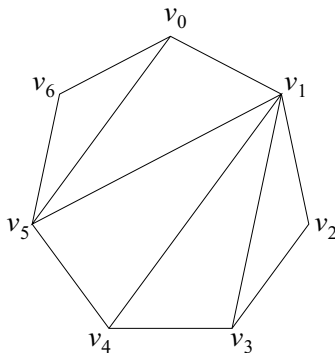
西山亨 著, 共立出版, 2022 年

東北大学大学院情報科学研究科

村上 斉

タイトルの「フリーズ」とは、英語の frieze で、装飾帯のことだそうです。彫刻の施された欄間みたいなものでしょうか。この本は、フリーズを狂言回しにして、三角形分割、連分数、Faray 数列、クラスター代数、フリーズ多様体など、様々な話題を説明しています。

正 n 角形 v_0, v_1, \dots, v_{n-1} の三角形分割を考えます。このとき、頂点 v_i に集まる三角形の個数を q_i とおき、列 $(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ を奇跡列きでれつと呼びます（「奇天烈大百科」を思い出すなり）。 $n = 7$ のときの例が次の図です。この場合、奇跡列は $(2, 4, 1, 2, 2, 3, 1)$ と



なります。さて、この列を次のような 1 の並びの下に置きましょう。このとき、奇跡列は繰り返し書き続けることとします (1 も)。

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 4 1 2 2 3 1 2 4 1

3 列目には

ユニモジュラ規則：

b
a d のような部分では $ad - bc = 1$ となる
c

をみたすように数を並べます.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	1	2	2	3	1	2	4	1	1
7	3	1	3	5	2	1	7	3	1	1

これを繰り返すと

1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	4	1	2	2	3	1	2	...
7	3	1	3	5	2	1	7	...
5	2	1	7	3	1	3	5	...
3	1	2	4	1	2	2	3	...
1	1	1	1	1	1	1	1	...

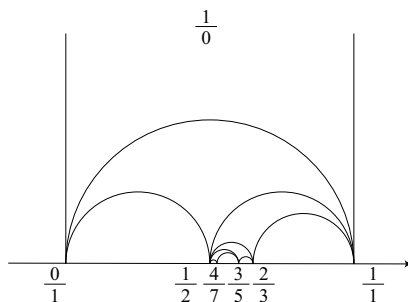
(1)

あーら不思議, 1 の列に戻ります. このような数の並び (行列と違って横方向と主対角線方向) をフリーズというそうです. フリーズの研究を始めたのは, あの H.S.M. Coxeter と, あの J.H. Conway だそうな. うーん, さもありなん.

次に, 左上から右下に並ぶ数字を分母に, その右上の数字を分子にした (既約) 分数を並べて, 左右の端に $\frac{1}{0}$ と $\frac{0}{1}$ を置きます. (一番上と一番下に 0 ばかりからなる列を付け加えたと考えましょう. ユニモジュラ規則が成り立っていることはすぐわかります.)

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

これらを数直線上に並べます. ここで現れた既約分数をよくみると, $\frac{b}{a}$ と $\frac{d}{c}$ の間に挟まれた分数は $\frac{b+d}{a+c}$ になっていることがわかります. このように「やってはいけない分数の足し算」を繰り返して隙間をどんどん埋めてできる分数の列を Faray 列と呼びます. また, 2つの分数 $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ が $|ad - bc| = 1$ をみたすときに円弧で結びましょう (隣り合う分数は構成法から円弧で結ばれますが, それ以外にも結ばれるものがあります). これは



Faray 図と呼ばれ, 大変深く面白い研究対象です.

上の Faray 図において，数直線を除くと外側にある円弧は 7 角形になっています．先ほどの正 7 角形で $v_0 = \frac{0}{1}, v_1 = \frac{1}{2}, v_2 = \frac{4}{7}, v_3 = \frac{3}{5}, v_4 = \frac{2}{3}, v_5 = \frac{1}{1}, v_6 = \frac{1}{0}$ とおくと，三角形分割とうまく対応が付くことが分かります．

このようにして，三角形分割→フリーズ→Faray 図→三角形分割という流れができました．

また，(1) の左端を右斜め下に向かう数の列 2, 7, 5, 3, 1 もいわくありげです． n 個の整数

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ に対して連分数 } a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}}}$$

と書くことにしましょう（連分数の中の符号に注意）．奇蹄列 2, 4, 1, 2, 2, 3, 1 から，連分数を次々作っていくと次のようになります．

$$\begin{aligned} [2] &= 2, \\ [2, 4] &= \frac{7}{4}, \\ [2, 4, 1] &= \frac{5}{3}, \\ [2, 4, 1, 2] &= \frac{3}{2}, \\ [2, 4, 1, 2, 2] &= 1, \\ [2, 4, 1, 2, 2, 3] &= 0, \end{aligned}$$

右辺の分子を並べると，(1) の左端に現れる数と一致しています．

これまでは，2 番目の列を最初に与えました．今度は，左端の主対角線に変数 a, b をおいてみましょう．ただし，一番上と一番下の列には 1 が並んでいるものとします．

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & & & & \\ y & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ユニモジュラ規則に従って空白を埋めてゆくと

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & \frac{1+y}{x} & \frac{1+x}{y} & y & \frac{1+x+y}{xy} & x \\ y & \frac{1+x+y}{xy} & x & \frac{1+y}{x} & \frac{1+x}{y} & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (2)$$

となり、右に周期的に続いて行きます。これは、「ガウスの奇跡の五芒星」と呼ばれる、球面上に描かれた直角五芒星（五角形の対角線だけを描いたもので、各頂点から出る対角線が直角に交わるもの）に関係した量になります。また、 A_2 型クラスター代数としてもおなじみのものです。

また、奇跡列のみたすべき代数方程式の定める多様体をフリーズ多様体と呼びます。(2) に対応するものは、次のようになります。上から 2 番目の列を左から順に $a := x$, $b := \frac{1+y}{x}$, $c := \frac{1+x}{y}$, $d := y$, $e := \frac{1+x+y}{xy}$ とおくと、

$$1 + a = cd, 1 + b = de, 1 + c = ea, 1 + d = ab, 1 + e = bc$$

をみたすことがわかります。この方程式の定める代数多様体をフリーズ多様体と呼ぶのです。

このように、フリーズと呼ばれる数や数式の並びをもとにして、三角形分割、連分数、Faray 数列、クラスター代数、フリーズ多様体など、様々な話題が縦横無尽に語られています。

多くの話題は高校生でもついて行けるでしょうし、大学の卒業研究などの題材としても適切ではないかと思います。学部生（数学専攻でなければ修士でも可）のゼミの本選びに困ったらどうぞ。また、あと一步踏み込めば研究の材料としても使えます。

最後に、この本の持った感じが僕は好きです。紙の本（と書くのも変ですが）よりも電子本の方が多くなりつつある昨今ですが、なんとなく持ち重りのする紙の質が、ペーパーバックとはいえ専門書を読んでいる高揚感を増してくれます。