絶対 Galois 群[1]

北海道大学大学院理学研究院
安田　正大

1

皆様こんにちは．本日は絶対 Galois 群のお話をさせていただきます．はじめにお断りしておきますが，このお話は数学の研究者の方や，あるいは数学の研究者を目指されている方を対象にしたものではありません．あまり予備知識を仮定せず，極力数式を書かずになんとなく感じだけを伝えることを目的としておりますので，基本的な概念の定義すら正確に与えておらず，最後まで読んでも何かをきちんと理解できるということはない，ということをお断りしておきます．また，私の研究成果についての話ではなく，数学者の皆さんはよくご存じの話がほとんどである，ということもお断りしておきます．

2

体というものがあります．「たい」と読みます．足し算，引き算，掛け算，それと 0 でない元による割り算ができて，掛け算が可換で 0 と 1 が異なるもの，体とはそのようなものです．きちんと定義を書きませんでしたが，足し算についての交換則と結合則，掛け算についての結合則，および足し算と掛け算についての分配則が仮定されています．大学初年度に多くの方が習う線形代数学の講義でも，体が出てくるのではないかと思いますので，ご存じの皆さんも多いと思います．

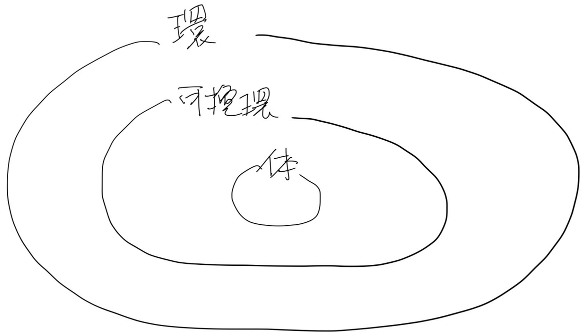
私の専門は整数論で，代数学の中の一分野と位置付けられることが多いですが，代数学というと群と環と体，この 3 つが代数学の基本である，というのが古典的な考え方で，今の大学のカリキュラムでもいまだにこの考え方を引きずっていることが多いです．体はこの 3 つのうちのひとつですが，残りの 2 つのうち，環は足し算と引き算，掛け算ができるものであり，掛け算が可換でなくても構わず，また，割り算がいつもできるとは限らないようなものです．環においても足し算についての交換則と結合則，掛け算についての結合則，および足し算と掛け算についての分配側が仮定されています．

[1] 2022 年度秋季総合分科会の市民講演会（9 月 17 日）

環や体はこのように一見すると複雑な構造をもつものです．なぜこれらが研究対象として大事かを説明するには，より簡単な構造を持つアーベル群や可換モノイドから紹介すべきかもしれませんが，本題から外れてしまいますので，ここでは省略させていただきます．

絶対 Galois 群という名前のもとになっている Galois の理論は，体と群が関係している，もう少し正確に言えば，体のある種の拡大を群の言葉で統制できる，という理論です．

このお話では環は 1 を持つものだけを考えますが，環のうち掛け算が可換となるものを可換環といいます．環，可換環，体について包含関係を図示すると，このような形になります:



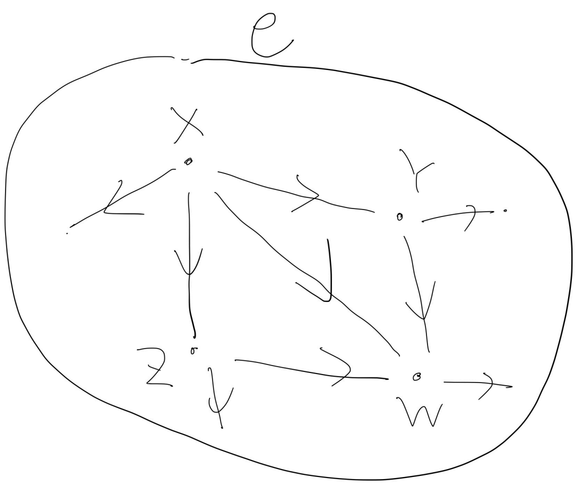
今日は主に体についての話をしますが，体より可換環の方が扱いやすいようなところもあります．例えば可換環，あるいは群や環もそうですが，これらは普遍代数学の枠組みで扱うことができますが，体はそうではなく，体のなす圏は [1] の意味での代数的圏にもなっていません．

例えば体の例としては有理数体 $\mathbb{Q}$ や実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ などがあり，また $\mathbb{F}_2$ という体もあります．$\mathbb{F}_2$ には 0 と 1 の 2 元しかなく，$1+1$ が 0 になるというものです．

整数論でよく出てくる体は次の三種類です．一つは大域体というもので，上に挙げた有理数体 $\mathbb{Q}$ や，より一般に代数体というものなどがこれに相当します．二つ目は局所体というもので，上に挙げた実数体 $\mathbb{R}$ と複素数体 $\mathbb{C}$，それに p 進数のなす体 $\mathbb{Q}_p$ などがこれに相当します．ここで p は素数です．三つ目は有限体というもので，上に挙げた $\mathbb{F}_2$ や，より一般に $\mathbb{F}_p$ などがこれに相当します．ここでも p は素数です．$\mathbb{F}_p$ は集合としては $0, 1, \ldots, p-1$ の p 個の元からなり，$\mathbb{F}_p$ における和 $a+b$ は，整数としての和 $a+b$ を p で割った余りで，$\mathbb{F}_p$ における積 ab は整数としての積 ab を p で割った余りとなります．

3

代数学の研究対象に限っても，群・環・体の他にも大事なものがいろいろあります．例えばとても大事なものに圏があります．実は先ほどもすでに圏という語を使ってしまいましたが，圏とはどのようなものかというと，対象 (object) というものと射 (morphism) というものからなっておりまして，さらにいくつかの構造をもつものです．この構造についてもう少し説明いたしますと，圏 $\mathcal{C}$ の対象を 2 つ選ぶごとに，その 2 つを X, Y と書くことにすると，X から Y への射のなす集合 $\mathcal{C}(X, Y)$ というものが与えられておりまして，射が合成でき結合則をみたすという条件，および恒等射が存在するという条件をみたすものですので，図に描くとだいたいこんな感じです．



圏の例として一番大事なものは集合の圏 **Set** です．この場合，集合が対象，写像が射ということになります．他に大事な例として，アーベル群と準同型のなす圏 **Ab** や，位相空間と連続写像のなす圏 **Top** があります．これらの圏 **Set**, **Ab**, **Top**, あるいはそれに類する圏を考える際は，例えば宇宙を一つ固定して議論するなど，集合論的な問題を回避する必要がありますが，ここでは本題からそれますので省略いたします．

圏にまつわる基本用語を 4 つ紹介します．一つは関手です．これは圏が 2 つある状況で使いますが，その圏を $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ とすると，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ というものが考えられます．関手 F というものは $\mathcal{C}$ の対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ から $\mathcal{D}$ の対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ への写像 $F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ と，あともう一つ，$\mathcal{C}$ の 2 つの対象 X, Y ごとに与えられた，集合 $\mathcal{C}(X, Y)$ から集合 $\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ への写像 $F_{X,Y}\colon \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$

から成り立っているもので，射の合成を保つなどの条件をみたすものです．二つ目は自然変換です．これは圏が 2 つあり，その圏を $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ としますとさらに $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手が 2 つある状況で使いますが，その関手を F と G とすると，このとき F から G への自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ というものが考えられます．自然変換 α というものは，$\mathcal{C}$ の対象 X ごとに与えられた，$F(X)$ から $G(X)$ への $\mathcal{D}$ における射 $\alpha(X)$ から成り立っているもので，この射が X について自然であるという条件をみたすものです．

三つ目は同型射です，これは逆射が存在するような射のことです．四つ目は自然同型です．これは 自然変換 α で，どんな対象 X に対しても $\alpha(X)$ が同型射となるものです．

以上で圏についての基本概念を準備しましたので，次節から本題である絶対 Galois 群の話に入ります．

4

K と L を体とするとき，K から L への体の準同型とは K から L への写像で，足し算，掛け算および $0, 1$ を保つものをいいます．これで体の圏 **Field** が考えられます．つまり対象が体，射が準同型となるものです．K を体とします．つまり K は圏 **Field** の対象です．L が K の拡大体であるとは，L が体で準同型 $K \to L$ がひとつ与えられていることをいいます．L が K の拡大体の時 L/K という書き方をします．ここでスライス圏 $(\mathbf{Field}^{\mathrm{op}})_{/K}$ を考えますと，ここで $\mathbf{Field}^{\mathrm{op}}$ は **Field** の反対圏ですが，これがちょうど K の拡大体のなす圏ということになります．この圏の充満部分圏として，K の有限次分離拡大のなす圏 $\mathcal{C}_{/K}$ を考えます．有限次というのは，L が K 上のベクトル空間として有限次元という意味です．有限次拡大が分離拡大というのは，いろいろ同値な述べ方がありますが，テンソル積 $L \otimes_K L$ という可換環を持ち出すと述べやすく，L の積が与える可換環の準同型 $L \otimes L \to L$ が直積因子への射影となるような拡大のことです．

この $\mathbf{Field}^{\mathrm{op}}$ という圏はスキームの圏 Sch に充満部分圏として埋め込めるのですが，つまり L を $\operatorname{Spec} L$ に送るわけですが，この埋め込みは $\mathcal{C}_K$ からスライス圏 $\mathrm{Sch}_{/\operatorname{Spec} K}$ への関手を引き起こしまして，有限次拡大 L が分離的というのは，スライス圏 $\mathrm{Sch}_{/\operatorname{Spec} K}$ における対角射 $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} L \times \operatorname{Spec} L$ が開埋め込みになるということになります．本題と外れた注意をしますと，位相空間の圏 **Top** において同じような対角射 $X \to X \times X$ を考えましたとき，この対角射が開埋め込みとなるのは X に離散位相が入っているときです．また，対角射が閉埋め込みとなるのが X が Hausdorff 空間のときです．

体 K の標数が 0 つまり $\mathbb{Z} \to K$ が単射のとき，あるいは K が有限体のときは，K の

有限次拡大はすべて分離拡大となります．

ここで，やや唐突になりますが層についてお話します．$\mathcal{C}_K$ 上の層というのはどういうものかというと，反対圏 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{op}}$ から集合の圏 **Set** への関手で，適当な貼り合わせの条件をみたすもののことをいいます．より正確には，$\mathcal{C}_K$ 上の層を考える際は，$\mathcal{C}_K$ に位相というものを入れないといけないのですが，ここでは原子位相という位相 ([12]) を入れて考えます．以下では $\mathcal{C}_K$ 上の層と自然変換のなす圏を Sh_K と書くことにします．例えば L/K に L を対応させる関手は層になります．この層を $\mathcal{O}$ と書き構造層とよぶことにします．この関手は忘却関手 **Field** $\to$ **Set** を経由することに注意しておきます．特に $\mathcal{O}$ は可換環の圏に値をもつ層とみなすことができ，そのため足し算と掛け算が層の射 $\mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を与えます．

ここで大事な定理がありまして，それはこの $\mathcal{C}_K$ 上の層の圏 Sh_K というのは，実はある副有限群 G_K がありまして，離散 G_K 集合の圏と圏同値となります．圏同値というのは圏の世界での同型のようなもので，自然同型を除いて逆が存在するような関手が一方の圏からもう一方の圏に作れる，という意味です．副有限群 G_K は同型を除いてただ一つに決まり，G_K のことを K の絶対 Galois 群といいます．

連結な対象のなす Sh_K の充満部分圏として，Sh_K^o を考えます．ここで層 F が連結とは，任意の 2 つの層 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ に対し, 余積 $\mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2$ を考えますと，写像

$$\mathrm{Sh}_K(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \amalg \mathrm{Sh}_K(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) \to \mathrm{Sh}_K(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \amalg \mathcal{G}_2)$$

が同型となることをいいます．Galois 理論において最も重要な Galois 理論の基本定理というのがあります．$\mathcal{C}_K$ から Sh_K^o への関手が，L/K をその表現する層に送ることで作れるのですが，Galois 理論の基本定理の帰結として，この関手が圏同値になります．ですので，今 $\mathcal{C}_K$ 上の層の圏 Sh_K を持ち出して絶対 Galois 群を導入しましたけど，わざわざ層を持ち出すような回りくどいことはしなくても，絶対 Galois 群 G_K を導入することができます．ただしこの Sh_K を持ち出す方法にしたほうが，体の理論に限らない，より一般の状況でも同様のことを考えやすくなり，柔軟性が高くなりますので，ここではあえて層を用いて絶対 Galois 群を導入する形に述べました．

それからもう一つ大事なのは，圏 $\mathcal{C}_K$ は K の有限次分離拡大を全部考えて作りましたが，$\mathcal{C}_K$ からかなり対象を間引いても，より正確には $\mathcal{C}_K$ を共終な充満部分圏に置き換えても，層の圏は変わらない，ということがありまして，そういう意味で層の圏 Sh_K^o は作りが頑丈というか，少しの改変ではびくともしない安定感のあるものです．

絶対 Galois 群 G_K にはより直接的な定義もあります．それは，ご存じの方も多いと思いますが，K の分離閉包という K の拡大体 $\overline{K}$ を用いる方法です．$\overline{K}$ は以下のよう

にして作ることができます．$\mathcal{C}_K$ の対象の共終な族 $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を選びます．添字集合 Λ は考えている宇宙に属するようにとります．共終というのは，K の任意の有限次分離拡大 L に対し，ある K_λ/K から L/K への射が $\mathcal{C}_K$ に存在する，という条件をみたすものです．Λ の勝手な有限部分集合 S に対して，K_λ のうち $\lambda\in S$ となるものだけを考え，これらのテンソル積を K 上でとったものを L_S とおきます．この S をいろいろ動かして L_S の余極限を考え，それを極大イデアルで割った剰余体が K の分離閉包 $\overline{K}$ となります．このようにすると余スライス圏 ${}_{K\backslash}\mathbf{Field}$ における $\overline{K}$ の自己同型群として G_K を定義することができます．

絶対 Galois 群の定義は，より一般の可換環もしくはスキームに対して一般化されています．例えば R が可換 noether 環でべき等元が 0 と 1 しかなく，さらに $0\neq 1$ であるようなもの，と少し条件がつきますが，このような R に対しては，体 K のときとほぼ同じ方法で群が定義できます．もう少し詳しく言うと K の有限次分離拡大のなす圏を考える代わりに有限エタール R 代数 S でべき等元が 0 と 1 しかないもののなす圏を考えます．これはどういうものかというと，可換環の準同型 $R\to S$ で，S は R 加群として有限生成平坦で，S のべき等元が 0 と 1 しかなく，さらに L/K が有限次拡大のときの分離性の条件と同様の条件をみたすものです．この圏を考えることでやはり副有限群が得られ，$\pi_1(R)$ あるいは $\pi_1(\operatorname{Spec} R)$ と書いて R のエタール基本群とよびます．

5

整数論でよく現れるいくつかの体について，その絶対 Galois 群がどうなるかについて話します．まず有限体の絶対 Galios 群についてです．有限体とは体であって有限集合となるものですが，k を有限体とすると，k の元の個数はある素数のべきになっていて，その素数が k の標数となります．また任意の素数のべき q に対して，元の個数が q となる有限体が同型を除いてただひとつ存在します．また k を標数 p の有限体としますと，k の元の個数は p のべきですので p^f とおきますと，体 k の自己同型全体はちょうど位数 f の巡回群をなし，その自然な生成元として Frobenius，正確には数論的 Frobenius ですけど，x を x^p に送る写像が生成元となっています．これらを総合しますと，有限体 $\mathbb{F}_p$ の絶対 Galois 群は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化 $\widehat{\mathbb{Z}}$ と標準的に同型になります．$\widehat{\mathbb{Z}}$ のひとつの定義は，アーベル群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に離散位相を入れ，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の自己準同型全体 $\mathbf{Ab}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ にコンパクト開位相を入れましたものが $\widehat{\mathbb{Z}}$ である，というものです．

有限体の絶対 Galois 群が $\widehat{\mathbb{Z}}$ となっているという話は，現在の理論に限界があるとい

うことでもありまして，本当はこの $\mathbb{F}_p$ に対して，絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{F}_p}$ が $\widehat{\mathbb{Z}}$ ではなく，Frobenius で生成される部分群 $\mathbb{Z}$ に離散位相を入れたもの，この群を Weil 群とよぶこともありますが，この $\mathbb{Z}$ が自然に出てきてほしい，$\mathbb{F}_p$ に伴う幾何的対象は，円周 S^1 で長さが $\log p$ のものになって欲しいわけです．ですが，なかなかそのような幾何的対象を無理やりでなく自然に取り出すという形になっていないのが現状です．

次に，局所体 K の絶対 Galois 群についてお話しします．$K=\mathbb{R}$ のときは，$\mathbb{R}$ の有限次拡大は $\mathbb{R}$ 自身もしくは複素数体 $\mathbb{C}$ と同型なものしかありません．そのため $\mathbb{R}$ の絶対 Galois 群は位数 2 の巡回群で，複素共役が生成元となります．また $\mathbb{C}$ の絶対 Galois 群は自明な群となってしまいます．これでは都合が悪いことも多いので，代わりに Weil 群 $W_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{C}}$ を考えることもあります．$W_{\mathbb{R}}$ は少し定義が難しいですが，例えば Hamilton 4 元数体の乗法群の中での $\mathbb{C}^{\times}$ の正規化群として定義することもできます．また $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^{\times}$ です．それから p が素数で $K=\mathbb{Q}_p$ の場合ですが，$\mathbb{Q}_p$ 絶対 Galois 群から自然に $\mathbb{F}_p$ の絶対 Galois 群へ準同型があります．この準同型は連続な全射で，この核を惰性群 $I_{\mathbb{Q}_p}$ といいます．この惰性群 $I_{\mathbb{Q}_p}$ からとある簡単な群，ここではそれを $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$ と書くことにしますが，に自然な準同型があります．ここで $\overline{\mathbb{F}}_p$ を $\mathbb{F}_p$ の分離閉包とし，$\overline{\mathbb{F}}_p$ に離散位相を入れると，$\mathbf{Ab}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{F}}_p^{\times})$ にコンパクト開位相を入れたものが $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$ です．この $I_{\mathbb{Q}_p}$ から $\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$ への準同型も連続な全射で，その核を暴惰性群とよびます．$P_{\mathbb{Q}_p}$ と書きまして，pro-p 群とよばれる副有限群となります．$G_{\mathbb{Q}_p}$ はこのような構造を持っているわけです．今 $K=\mathbb{Q}_p$ の場合について話しましたが，K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の場合も大体同じような構造を持ち，惰性群 $I_K \subset G_K$ および暴惰性群 $P_K \subset I_K$ が定まり，これらは G_K の閉正規部分群となります．K の有限次拡大は G_K で統制されるのですが，そのうち G_K/I_K で統制されるものを不分岐拡大，G_K/P_K で統制されるものを馴分岐拡大といいます．

$p \neq 2$ のときは $G_{\mathbb{Q}_p}$ の副有限群としての構造は決定されています ([10]) が，その記述はかなり複雑です．また，K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大で 1 の原始 $2p$ 乗根を持つときは，G_K の同型類は, K の乗法群 $K^{\times}$ の位相群としての構造，および K の最大不分岐拡大の乗法群の p トージョン部分の Frobenius の作用つきアーベル群としての構造，この 2 つで完全に決定されることが知られています ([9]，[21])．

K が有理数体 $\mathbb{Q}$ のときや，より一般に K が代数体のときは G_K の構造は充分解明されているとは言えません．ただし G_K のアーベル化，つまり G_K を交換子群 $[G_K, G_K]$ の閉包で割ったものですが，このアーベル化はよくわかっておりまして，類体論によって記述がなされています．類体論がどういうものかを粗く説明しますと，類体論には K

が例えば局所体のときを扱う局所類体論と，K が大域体のときを扱う大域類体論がありまして，局所類体論によると K が局所体の場合は K の乗法群 $K^\times$ から G_K のアーベル化に自然な準同型がありましてかなり同型に近い，より正確には $K^\times$ と Weil 群 W_K のアーベル化が同型になります．また大域類体論によると K が大域体のときは，K のイデール類群という，K のイデール群を乗法群 $K^\times$ で割って得られる位相群から G_K のアーベル化に自然な準同型がありましてかなり同型に近くなっています．そしてこの類体論を一般化する Langlands 対応あるいは Langlands 予想と呼ばれるものがあります．ここではその詳しい話はすることはできませんが，K が局所体の時はどういうものかと言いますと，$n \geq 1$ を整数とするとき, G_K の n 次元表現，正確に述べる際は K の Weil-Deligne 表現というものを持ち出すと便利なのですが，Frobenius 半単純な K の n 次元 Weil-Deligne 表現の同型類が，ちょうど $\mathrm{GL}_n(K)$ という位相群ですけど，これの既約 smooth 表現の同型類と一対一に対応するという結果 ([5]，[6]) があります．K が大域体のときには，G_K の n 次元表現のようなものと，アデール群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ の保型表現という既約 smooth 表現の間に対応があるのではないかという予想があります．このタイプの予想を正確に述べる一つの方法は，ひとつ素数 ℓ を固定して述べるもので，$G_\mathbb{Q}$ の n 次元既約 ℓ 進表現で，Fontaine-Mazur [4] の意味で幾何的な表現と，アデール群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の L 代数的なカスピダル保型表現とが対応するのではないか，という予想がひとつの定式化として提唱されています ([2]，[17]).

6

最後に外部自己同型についてお話したいと思います．群 G_K の外部自己同型は群論的にも定義できますが，圏論的に言うと，先ほどの $\mathcal{C}_K$ 上の連結な層の圏 Sh_K^o を考えるのですが，Sh_K^o から Sh_K^o 自身への圏同値を自然同型で割ったものが合成に関してなす群が G_K の外部自己同型群で，$\mathrm{Out}G_k$ と書きます．Neukirch・内田の定理 ([14]，[15]，[18]，[19]) というものがありまして，これは体 K が大域体のときに，K の体としての自己同型群から $\mathrm{Out}(G_K)$ への自然な準同型が同型になるというものです．このように大域体の場合は $\mathrm{Out}(G_K)$ はよくわかっているのですが，K が $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 以外の局所体のときは今でも完全にはわかっていない，という状況になっています．例えば K が $\mathbb{Q}_p$ のとき，$\mathbb{Q}_p$ の体としての自己同型は自明なものしかありませんが，$\mathrm{Out}(G_{\mathbb{Q}_p})$ には非自明な元があることが知られています ([20]，[16])．ここで私の学生だった河相さんの 2018 年の修士論文 [11] にある結果を紹介します．先ほど導入した $\mathcal{C}_K$ 上の構造層 $\mathcal{O}$ を $K = \mathbb{Q}_p$ の場合

に考えますと，各 $\mathcal{O}(L)$ は位相体になるので，とくに $\mathcal{O}$ は位相空間の圏に値をもつ層になっています．そこで位相空間に値を持つ層の射 $\star\colon \mathcal{O}\times\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ で，各 $(\mathcal{O}(L),\star,\cdot,0,1)$ が位相体となるようなもの全体を考えます．つまり $0, 1$ と掛け算を固定して足し算をどのくらい変形できるかを考えるのですが，このとき $\mathrm{Out}(G_{\mathbb{Q}_p})$ とこのような $\star$ 全体のなす集合との間に自然な全単射がある，というのが結果です．$\mathrm{Out}(G_{\mathbb{R}})$ に対しては同様のことが成り立たないのですが, $G_{\mathbb{R}}$ の代わりに Weil 群 $W_{\mathbb{R}}$ を考えると類似の現象が起きています.

より大事な例として，これは体ではないのですが，可換環 $A=\mathcal{O}(M_{0,5,\mathbb{C}})$ というものを考えます．$M_{0,5,\mathbb{C}}$ というのは 5 点付き種数 0 曲線のモジュライとよばれるものなのですが，A は簡単に書くことができて

$$A=\mathbb{C}\left[x^{\pm1},y^{\pm1},\frac{1}{(x-1)(y-1)(x-y)}\right]$$

となります．この書き方ではわかりにくいのですが，実は A には 5 次対称群 S_5 が作用しています．この A に対して S_5 同変なエタール基本群 $\pi_1^{S_5}(A)$ を考えます．有限エタール A 代数 B で，べき等元が $0, 1$ だけのものを対象とする圏を考えるのは $\pi_1(A)$ のときと同じなのですが，B から B' への射を A 上の準同型ではなく，ある $\sigma\in S_5$ があって図式

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ A & \longrightarrow & B' \end{array}$$

が可換となるような可換環の準同型 $B\to B'$ を考えると $\pi_1^{S_5}(A)$ を作ることができます．少し違う圏を用いて $\pi_1^{S_5}(A)$ を作ることもできます．それは有限エタール A 代数 B で S_5 が作用し，$A\to B$ が S_5 の作用と両立的で, さらに不変部分 B^{S_5} のべき等元が 0 と 1 だけとなるものを対象とし，A 代数の準同型で S_5 の作用と両立的なものを射とする圏です．前者の圏と後者の圏は同値ではなく，後者の圏については Galois 理論の基本定理から成り立つと述べた圏同値 $\mathcal{C}_K\cong\mathrm{Sh}_K^o$ の類似が成立しますが, 前者の圏では成立しません．この $\pi_1^{S_5}(A)$ に関する $\mathrm{Out}(\pi_1^{S_5}(A))$ を Grothendieck-Teichmÿler 群とよび $\widehat{GT}$ で表します．本来の $\widehat{GT}$ の定義 ([3]) はここで与えたものとは見た目が違うのですが，このように定義することもできることが星・南出・望月 [7] の結果に基づいて南出・中村 [13] によって明らかにされました．$\mathbb{Q}$ の分離閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込みをとると，$G_{\mathbb{Q}}$ から $\widehat{GT}$ への準同型を作ることができます．Belyi の定理というものを用いると，この準同型は単射であることがわかります．有名な伊原の問題 [8] は，この単射準同型が全単射であるかを問うものです.

参考文献

[1] Adámek, J., Rociský, J., Vitale, M.: *Algebraic theories.* Cambridge Tracts in Mathematics **184**. Cambridge University Press (2011)

[2] Buzzard, K., Gee, T.: *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations.* In: Automorphic forms and Galois representations, London Math. Soc. Lecture Notes Series **414**, 135–187 (2014)

[3] Drinfeld, V. G,: *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Algebra i Analiz **2**, Issue 4, 149–181 (1990)

[4] Fontaine, J.-M., Mazur, B.: *Geometric Galois representations.* In: Proc. Conf. on elliptic curves and modular forms, Hong Kong, 1993, 41–78. International Press (1995)

[5] Harris, M., Taylor, R.: *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Ann. of Math. Studies **151**. Princeton University Press (2001)

[6] Henniart, G.: *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $GL(n)$ *sur un corps* p*-adiques.* Invent. Math. **139**, 439–455 (2000)

[7] Hoshi, Y., Minamide, A., Mochizuki, S.: *Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups.* Kodai Math. J.

[8] Ihara, Y. *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions.* In: Proc. I. C. M., Kyoto 1990, 99–120. Math. Soc. Japan (1991)

[9] Jakovlev, A. V.: *The Galois group of the algebraic closure of a local field.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **32**, no. 6, 1283–1322 (1968)

[10] Jannsen, U., Wingberg, K.: *Die Struktur der absoluten Galoisgruppe* $\mathfrak{p}$*-adischer Zahlkörper.* Invent. Math. **70**, 71–98 (1982)

[11] 河相圭亮, 非アルキメデスな局所体の外部自己同型群の新たな表示. 大阪大学修士論文，2018 年

[12] Mac Lane, S., Moerdijk, I.: *Sheaves in geometry and logic.* Universitext. Springer (1992)

[13] Minamide, A., Nakamura, H.: *The automorphism groups of the profinite braid groups*. Amer. J. Math. **144**, no. 5, 1159–1176 (2022)

[14] Neukirch, J.: *Kennzeichnung der p-adischen und der algebraischen Zahlkörper*. Invent. Math. **6**, 296–314 (1969)

[15] Neukirch, J.: *Kennzeichnung der endlich-algebraischen Zahlkörper durch die Galoisgruppe der maximalen auflösbaren Erweiterungen*. J. reine angew Math. **238**, 135–147 (1970)

[16] Neukirch, J., Schmidt, A., and Wingberg, K.: *Cohomology of Number Fields, Second Edition*. Springer (2008).

[17] Taylor, R.: *Galois representations*. Ann. fac. sci. Toulouse 6^e sér. **13**, no. 1, 73–119 (2004)

[18] Uchida, K.: *Isomorphisms of Galois groups*. J. Math. Soc. Japan **28**, 617–620 (1976)

[19] Uchida, K.: *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*. Ann. of Math. **106**, 589–598 (1977)

[20] Wingberg, K.: *Der Eindeutigkeitssatz für Demuškin-Formationen*. Invent. Math. **70**, 19–113 (1982)

[21] Zel'venskiĭ, I. G.: *On the algebraic closure of a local field for $p = 2$*. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **36**, no. 5, 933–946 (1971)