

書 評

教養としての数学

—数学がわからない僕と数学者の対話—

キム・ミニョン 著，米津篤八 訳，プレジデント社，2021 年

東京電機大学理工学部

越智 禎宏

数論幾何学の研究者であるキム・ミンヒョン氏¹が一般読者向けに書いた韓国語の本があるとは評者は最近まで知らなかったが，その1冊が日本語に翻訳されたのは非常に喜ばしいことである．原書のタイトルを直訳すると「数学が必要になる瞬間（副題：人間はどのくらい深く考えることができるのか）」で，読者は，物理学，哲学，社会科学，情報科学，文学と多岐にわたる話題を楽しむことができる．そして，それぞれの科学においてどのようにして数学が必要になるかを理解しやすく面白い例を用いて議論しているので，読者も読み進むにつれてその面白さに引き込まれ，自然とより深く考えるようになっていだろう．その意味で，この本は教養がつくだけでなく，思索を促す本である．所謂 popular mathematics の本としては約 270 ページとボリュームがある方だが，翻訳²も素晴らしく，とても読みやすい．

この本は，例えば大学生にとって，高校数学の世界からより広くて多様な数学の世界への橋渡しとして役に立つと思う．また，好奇心の強い高校生や中学生でも助けを借りて読めるだろう．最小限の数式と予備知識で数学的思考について深く考察されているので，社会人も含めて数学に関心のある全ての層の人が楽しめる本である．内容を簡単に紹介する前に，最初の「はじめに」全体にあふれる著者のユーモアを強調したい．著者の人柄と遊び心が分かる．その後，対話の相手³をつとめた編集部の前書きが続く．

全体は7つの講義と付録からなり，短いプロローグの後，第1講は「数学とは何か」についての対話である．第2講は物理学，第3講は確率論，第4講は社会科学（投票と民主主義），第5講は結婚などのマッチングのアルゴリズム，第6講は現代幾何学，終講は

¹Kim Minhyong 氏の名前は，本書では連音化（リエゾン）した「キム・ミニョン」となっているが，評者は「キム・ミンヒョン」の方が適切だと考える．名前を韓国語から英語に直すときは連音化は考慮されない．また，ある韓国人から言われたのだが，韓国でも連音化するかしらないかは人や発話の状況にもよるので，人名をハングルからカタカナに直すときは発音にこだわらず文字から規則的に直す方がよいとのことである．

²ただし，p.21 注の BSD 予想の箇所はいくつか専門用語の訳が適切でないようである．韓国語では同じ語なのだが「係数」は「階数」とすべきで，「根の置数」と訳されている所は韓国語からの直訳は「根の次数」だが，日本語では「零点の位数」が適切である．また，p.75 の t_2 は t^2 の間違いである．

³名前から察するに二人とも多分女性だと思われるが，日本語版の副題に性の限定される「僕」という語が選ばれた理由はわからない．女性が男性専門家に質問して教えを受けるというステレオタイプな設定をイメージさせるのを避けたのかもしれない．

再び「数学的思考とは何か」という問いに帰る。特講が設けられ、「数とは何か」という問題から議論が始まって有限体とその符号理論への応用、公開鍵暗号の紹介で終わる。

本格的に講義が始まる第2講「歴史を変えた3つの数学的発見」は最も長い章で、60ページほどある。3つとは、フェルマーの原理、ニュートンの運動法則、デカルト座標である。この章は物理と数学についてのとても良い入門的講義になっている。

第3講は原著では「確率論の善悪」となっていて、倫理学と確率論の関係が主題である。まず功利主義倫理学の「幸福の計算学」から話は始まる。そして近代会計学の創始者パチョーリの著書「スムマ」(1494年)に記された「分配問題」⁴が遂にパスカルとフェルマーにより期待値を用いた解決に至る経緯を論じた後、保険における「正当な価格」へ話題は移る。最後に倫理学の有名なトロッコ問題と車の自動運転との関連が説明され、「善悪も確率論に支配されている」というテーゼで終わる。

第4講の原題は「答えはなくても良い」で、日本語版では「民主主義は数学的に不可能か?」である。市民たちが投票によって物事を決める社会は民主主義的であり、一人の人物が社会の全てを決定するような独裁者のいる社会は民主主義的とは言えないだろう。しかし、市民の自由な投票によって物事を民主主義的に決めようという試みは独裁者の存在に帰結してしまうというパラドックスが「アローの不可能性定理」(Arrow's Impossibility Theorem, 1951)である。いま、3つ以上の課題(例えば、子育て支援、街の開発や高齢者医療費負担など)があって、それらの優先順位を市民の投票によって決めたいとする。投票結果から順位を決める際に複数の合理的な決め方⁵があるのは本書で示されている通りで、方法が違えば順位が異なりうるのも面白い。いずれにせよ、3つ以上の社会的課題に対して全ての市民が優先順位(選好と呼ぶ)を自由に投票するとき、市民全員の選好を入力とし、社会における順位の設定を出力とする関数を社会的厚生関数(social welfare function)とよぶ。このとき、いかなる社会的厚生関数に対しても、それが幾つかの民主主義に相応しい原則⁶を満たすならば、逆説的に、ある個人Aが存在して、他の全ての人の選好がどうであれ、Aの選好が社会における選択を全て決めてしまうような事態となってしまうこと(「独裁者」dictatorの存在)が数学的に証明される。

このアローの定理の証明は本書には書かれていないが、以前に定理の名前だけ知っていた評者は、今回本書を通じてとても関心をもったので初めて証明⁷を追ってみた。証明は短く、使う数学は集合・論理でやる「関係」ぐらいで難しくないで、「関係」を習った大学1,2年生あたりには良い教材と思う。アローの定理は、理想的な「答え」が無いように思わせるが、このような場合に、数学的にどうすべきか興味深い考察がなされる。

⁴英語で the problem of points または the problem of division of the stakes と言われ、原著と日本語版では「点数の問題」となっている。

⁵「ボルダ方式」「徹底投票」「コンドルセ方式」などが本書で例を用いて解説されている。

⁶本書で説明されているように「全員一致の原則」や「無関係な選択肢からの独立性の原則」など。

⁷例えば YouTube にある Eric Pacuit 氏の解説動画“Proof of Arrow's Theorem”がわかりやすい。

第5講の原題は「答えがあるとき、探すことはできるか」で、複数の男女から安定的なカップルをマッチングするためのゲールとシャプレイ (Gale-Shapley) のアルゴリズムの解説である。第4講と同じく、この章も自分で手を動かして確かめると面白みが増す。簡単なので自分でいろいろな場合を作ってアルゴリズムを試してみることができる。また、男性陣から女性陣にプロポーズする設定と女性陣から男性陣にプロポーズする設定ではアルゴリズムからできるカップルが同じになるとは限らない (プロポーズする側が有利になる)。それも容易に自分で例を作って確かめられる。後にノーベル経済学賞を受賞することになる彼らの論文は、数学の先生たちに数学的思考とは何かを示すために「数学教育誌」⁸(p.168) に投稿されたというのも面白い。

第6講は原著では「宇宙の実体、模様と位相と計算」となっていて、幾何学についてである。位相不変量としてのオイラー数が説明された後、宇宙は代数的か幾何的か (これが日本語版の章題) という問いが議論される。終講は、「数学は発明か発見か」という問いから始まる。そして、数学は確実なものであるというのは間違いで、時に誤ることもありながら常に真理に一步ずつ近づいていく過程であると主張される (p.206)。

最後に「特講」があり、まず「数とは何か」という問いが提示される。著者の答えは、数とは「数体系の要素」というもので、数体系とは2つの演算があって、交換法則、結合法則、分配法則を満たす「構造」のことである (p.229-p.230)。例として、有限個の元からなる数体系が提示される。一般の読者にはどのような規則なのか見当がつかないであろう図表 5.3 (p.247) と図表 5.5 (p.250) は、それぞれ有限体 $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ の2次拡大 \mathbf{F}_{2^2} と3次拡大 \mathbf{F}_{2^3} の掛け算の表である。図表 5.5 について言えば、 \mathbf{F}_2 上の3次方程式 $x^3 + x + 1 = 0$ の解の一つに名前を付けて α とすると、 \mathbf{F}_{2^3} の元は $a\alpha^2 + b\alpha + c (a, b, c \in \{0, 1\})$ と表せるので、それを abc と表している (例えば $Z = 110$ は $\alpha^2 + \alpha$ のことである)。それから話は誤り訂正符号に移る。導入部分はとても分かりやすいが、p.253 で「ここから説明する内容は難しいですが」とあるのは、(7,4) ハミング符号 (Hamming (7,4) code) のことである。それは、 a, b, c, d, e, f, g を0か1とし、4ビットの情報 $bdfg$ に3ビットの誤り検査パリティ a, c, e を付け加えてできる長さ7の符号 $w = abcdefg$ である。符号の伝送の際に生じた誤りが1個の場合は、正しく訂正できる。通常⁹、誤り検査パリティ a, c, e は3つの合同式 $a + d + f + g \equiv 0 \pmod{2}$, $c + b + d + g \equiv 0 \pmod{2}$, $e + b + d + f \equiv 0 \pmod{2}$ が成り立つように $bdfg$ に対して定められるが、本書のように有限体 \mathbf{F}_{2^3} という数体系を使えば、 $F(w) = a001 + bZ + cZ^2 + dZ^3 + eZ^4 + fZ^5 + gZ^6 = 000$ と1つの式で表せる。最後に、公開鍵暗号と量子コンピュータの話で特講は終わる。

この本を数学科4年生の一人に読んでもらったが、面白くて学ぶところが多いと好評だった。ただ、数学より数学以外¹⁰の内容で少し難しいところがあったようである。

⁸The American Mathematical Monthly (vol.69, no.1, 1962) .

⁹平松豊一「応用代数学」(裳華房) p.100.

¹⁰スコットランド啓蒙主義など、評者にとっても調べていくうちに関心の対象が広がる面白い本である。