

数学教室だより：アウトリーチ編

近畿大学数学コンテスト

近畿大学と言えば「マグロ」や「志願者数」で有名ですが、実は20年以上も毎年「数学コンテスト」を開催しているんです。今回はその様子をご紹介します。

●近畿大学数学コンテストとは

近畿大学数学コンテストは、近畿大学東大阪キャンパスで毎年、大学祭期間中の11月3日（祝）に開催している、「問題を考える楽しみと解けた瞬間の喜び」を広く味わってもらうための無料の公開イベントです。参加者は朝10時に配布された問題（8問程度）から3問を選んで、5時間かけて答案を作成します。解答作成場所自由、参考書などの使用自由、グループによる参加も可能（配点にウェイトあり）で、長時間考え続けるという、数学者の研究スタイルをモデルにした企画になっています。

これは、数学の楽しさや醍醐味を忘れかけている数学科の学生に、それらを思い出してほしいという願いから1999年に始まりました。第7回（2004年）からは、参加資格から「数学のプロでないこと」も撤廃されて、現在では数学を愛するフェアプレイ精神さえあれば、誰でも参加できます。毎年全国から中学生、高校生、大学生、大学院生、数学教員、一般の方、そして時々数学者も参加し、完全無差別級の数学バトルが繰り広げられています。多くの数学好きに支えられて、おかげさまで今年で24回目を迎えます。

●数学コンテストの問題たち

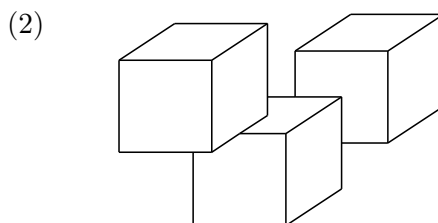
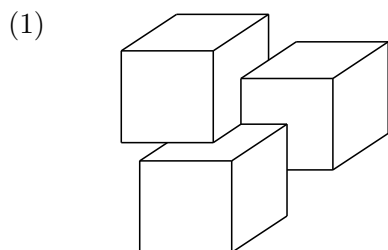
数学コンテストの問題にはA問題とB問題があります。A問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題、B問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です。問題にはそれぞれ正解ポイントが付いていて、参加者は8問くらいの問題の中から3問を選んで解答し、正解した問題のポイントの合計を競います。

すべての問題は近畿大学数学教室のHP

https://www.math.kindai.ac.jp/about/kindai_mathematics_contest.html

に掲載されていますが、ここでその一部を紹介しましょう。解答に関するお問い合わせには対応いたしかねますので悪しからず。

2014 年度第 17 回 A-4 (30pt) : 1 辺の長さが a である立方体 3 つが、図のように接して 1 つに連なった立体を考える. 図では, 立方体の頂点が他の立方体のある面に接するとき, その頂点は面の中心にあり, 交わる辺はすべてそれぞれの midpoint で互いに直交している. このとき, (1), (2) の立体を含む体積最小の凸多面体 (凸包という) の体積をそれぞれ求めよ. ただし, 多面体が凸とは, 多面体の任意の 2 点を結んだ線分がその多面体に含まれることであり, 四面体や直方体のようにへこんだ部分がない多面体のことである. ((1), (2) の立体自体は凸ではない.)



2017 年度第 20 回 A-5 (30pt) : $\frac{\theta}{\pi}$ と $\sin \theta$ がともに有理数となる θ をすべて求めよ.

2018 年度第 21 回 B-2 (50pt) : $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $x = 0$ において右微分可能で $f(x) \geq 0$ ($x \in [0, 1]$) を満たす関数とする. このとき, 次の収束, 発散を判定せよ. 収束する場合には, 極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(\frac{k}{n^2}\right) \right\}^n$$

2019 年度第 22 回 A-5 (25pt) : 唐突ですが $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ の値はいくつでしょうか? もちろん $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ とする計算で「正しい」答え $\frac{11}{15}$ が得られます. 分母どうし・分子どうしをそれぞれ足し算して

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{5+3} = \frac{3}{8}$$

のように, いわゆる「やっではいけない足し算」では「正しい」答えは得られません. また, 「0 で割る」こともやっではいけないことの 1 つとして挙げられます. つまり「やっではいけない割り算」で得られる“分数” $\frac{1}{0}$ が一例ですが, ここではこのような“分数”も許すことにします. 今回はこの「やっではいけないシリーズ」を使った問題です.

辺の長さが等しい正三角形を図 1 のように並べます. 左から k 番目にある正三角形を T_k と表します. 次に, 各正三角形 T_k を, 頂点と対边上の点を線分で結ぶことで分割することを考えます. ただし, k が奇数のときは上側の頂点と対边上の点を, k が偶数のときは下側の頂点と対边上の点を線分で結ぶことで分割します. 図 2 がその一例です. 続いて, T_1 の左下の頂点に“分数” $\frac{1}{0}$ を, 上の頂点に分数 $\frac{0}{1}$ を対応させます. ただし, T_1 の上の頂点と T_2 の左上の頂点は重

なっているので、 T_2 の左上の頂点にも分数 $\frac{0}{1}$ が対応しているとします。以降、三角形において、2つの頂点に分数が対応したとき、残り1つの頂点に「やってはいけない足し算」を使って分数を対応させます。例えば、図2において T_1 は3つの三角形に分割されていますが、一番左の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{0} + \frac{0}{1} = \frac{1+0}{0+1} = \frac{1}{1}$$

を対応させ、2つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{1} + \frac{0}{1} = \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

を対応させ、3つ目の三角形の残った頂点には

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{1} = \frac{1+0}{2+1} = \frac{1}{3}$$

を対応させる、という具合です。この操作を続けると、図3のように、頂点に分数が対応した、分割された正三角形の列が得られます。この例では T_3 の右端に分数 $\frac{3}{10}$ が対応しています。

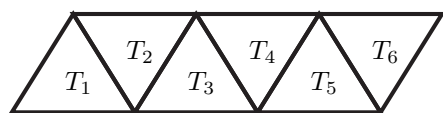


図1

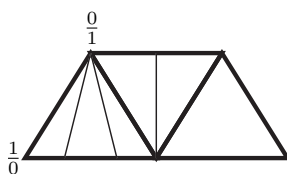


図2

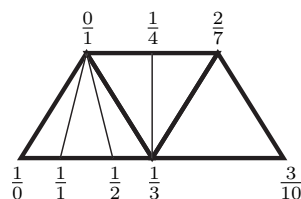


図3

問. T_n の右端の頂点に分数 $\frac{1103}{2019}$ が対応するような、分割された正三角形の列はあるか？ 有るなら実例を見つけよ。ないならその理由を述べよ。

中学生でも解答可能な問題からプロでも唸る問題まで、大学入試問題とはまた一味違った多彩な問題たちが数学コンテストの特徴の一つです。中には、数学研究から派生したものや、今後の研究テーマの萌芽を含んでいるものもあります。実際に、コンテスト問題を発展させて論文を書いたスタッフもいます。また、一見よくあるテーマでも、数学者ならではの切り口で新しい問題を提案していたり、斬新な解答が用意されているものもあります。どの問題も、考えると興味が広がり解けると感動する、斬新で魅力的な研究の香りがする、これが出題者のこだわりです。このこだわりこそが、20年以上にわたって多くの優秀な参加者を集め続けている理由の一つなのかもしれません。

ちなみに、数学コンテスト問題の解説を掲載した

- 「21世紀無差別級数学バトル」, ピアソンエデュケーション, 2004年

●「白熱！ 無差別級数学バトル」，日本評論社，2013年
は，より私たちのこだわりを感じられる本になっています。

●数学コンテストの様子

毎年90名前後の参加者がいる数学コンテストですが，解答時間5時間の使い方は人それぞれです。解けそうな問題を探る人，最もポイントの高い1問に集中する人，グループで相談する人たち，教室を出てキャンパス内の好きな場所で試行錯誤を楽しむ人，などなど。外では大学祭を開催しているので，気晴らしに出かける人もいます。この場で久々に再会する人たちもいて，互いの近況を報告し合う姿も見られます。

答案提出後には，問題解説の時間があります。最先端の数学との関わりや，参加者にとって予想もつかない解法の説明に感嘆の声が上がることも珍しくありません。

問題解説が終わると，その黒板を背景に表彰式が行われます。お互いの健闘を称え合い，17時ごろに数学コンテストは終了します。



解答作成風景



解説風景



表彰式

●数学コンテストの裏側

数学コンテストは近畿大学数学教室の現役・退職の教員で運営されています。無差別級数学バトルは，参加者同士だけではなく，出題者と参加者の真剣勝負の場でもあるのです。問題の作成・検討では私たちもいつになく本気です。原案を多角的に検証・議論し，参加者が楽しめる，そして真剣勝負できる問題へと仕上げていきます。検討会議では，さまざまな専門の数学者がそれぞれのアプローチで解答を披露することもあります。共通の話題として数学教室のスタッフがコミュニケーションをとる良いきっかけにもなっていて，校務というよりも共同研究に近い雰囲気でも私たちが楽しんでます。

数学コンテスト当日，出題者は参加者の悩む姿に笑みを浮かべたり大学祭を楽しんだりします。しかし，15時に答案が提出されると，その様子は一転します。なぜなら採点時間は1時間しかなく，そこで多くの，中には高度な論証を含む答案を採点しなければ

ならないからです。採点のしやすさも考慮して出題してはいるものの、特に解答者が多い問題の採点はいつもギリギリです。スタッフ総出で協力して採点します。中には私たちの想定を超える素晴らしい答案が提出されることもあり、採点中こちらでも時々感嘆の声が上がります。そんな解答者にはボーナス点が与えられます。

●2020年と2021年の数学コンテスト

新型コロナウイルスの影響で、2020年の数学コンテストは開催の断念を余儀なくされました。20年以上続けてきた企画だけあって断腸の思いでしたが、毎年楽しみにしてくれている方々のためにできることはないかと考え、「数学コンテスト・ブレイク」と題して、過去の問題をもう一度味わう企画を行いました。取り組み方も自由として、厳選した過去の問題の解説動画を限定公開し、参加者の感想や質問などを集めてHP上に掲載して出題者とのコミュニケーションを図りました。普段解答に対する問い合わせには応じていないこともあったからか、多くの方にご視聴いただきました。

2021年の数学コンテストはオンラインで開催しました。もともと解答場所も参考書の使用も自由な企画なので、オンライン試験のような気遣いは無用で、気軽に参加できる企画になりました。一方で、Zoomを活用したものの、参加者どうしや参加者と私たちのコミュニケーションがうまくとれなかったこと、答案の仕分けに苦労したことなど、いつもと違う運営に多くの反省点もありました。

●これからの数学コンテスト

オンライン開催は、気軽に参加できる、一人で数学に没頭できるなどの良さもありました。しかし、参加者に近畿大学東大阪キャンパスを実際に訪れてもらい、大学の雰囲気とともに数学を味わってもらい、そして参加者同士の交流はもちろん、参加者と私たちも数学を通して交流する、やはりこれこそが数学コンテストの醍醐味なのだと思います。

数学のコンテストやコンクールがたくさんある中で、私たちは特徴的なコンテストを開催していると自負しています。特に関西を中心に、数学が好きな高校生に注目してもらい、受験や入学につながっている、という嬉しい側面もあります。『近畿大学と言えば「数学コンテスト」』とも言われるよう、この取り組みを続けていきたいものです。

数学コンテストはあなたの挑戦を待っています！！

(文責：松井 優)