

# バーチャル・リアリティを用いた4次元可視化プロジェクト<sup>1</sup>

九州大学大学院数理学研究院  
石井 豊

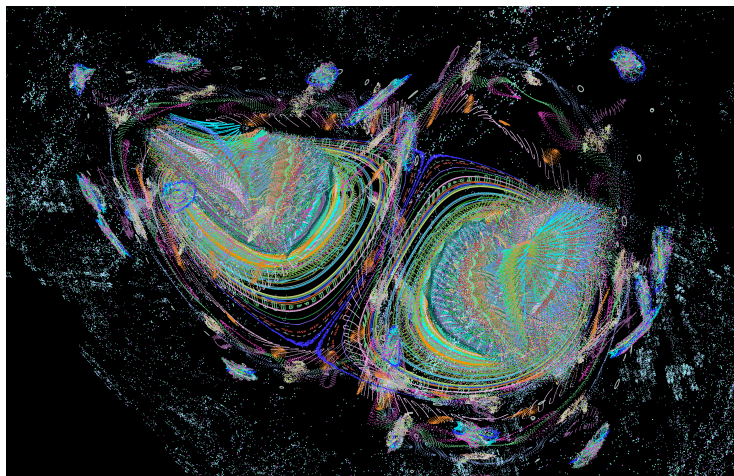


図 1: 複素ヘノン写像のジュリア集合 (宇敷重広氏提供)

## 1 そのものの始まり

私の専門は力学系理論, 特に複素ヘノン (Hénon) 写像と呼ばれる  $\mathbb{C}^2$  の多項式写像がなす力学系を長年研究しています.  $\mathbb{C}^2$  の複素力学系ですから, 必然的に実4次元空間のジュリア集合 (図1) と呼ばれるフラクタル集合を研究することになります. このような複素ヘノン写像のジュリア集合については, 1980年代から京都大学の宇敷重広先生やコーネル大学のジョン・ハバード先生が様々な図 (ただし当時はジュリア集合を不安定多様体と呼ばれる複素1次元部分多様体でスライスした実2次元の図) を描き続けていました. 私が初めてこのような図を見せて頂いたのは1990年代の後半ですが, 彼らからこれらの図の数学的な説明を受けて「4次元でどうなっているか想像がつかだろう?」(彼らは数多くの数値実験をこなしていて, 4次元の感覚が身に付いていたのでしょう) と聞かれるたびに「いえ, わかりません」と答えて悔しい思いをしてきました. そこで, それならもっと直感的に4次元空間が理解できる可視化の方法を編み出そうじゃないか, と思い立ったのがこのプロジェクトの始まりです.<sup>2</sup>

バーチャル・リアリティ (VR) はコンピュータが描く仮想空間をインタラクティブに知覚できるシステムです. 今でこそ VR は市民権を得て日常的になりつつありますが,

<sup>1</sup>日本数学会のホームページで入手が可能な pdf 版では, 本拙文に出てくる図が全てカラーになります. 是非そちらもご覧下さい.

<sup>2</sup>とは言っても, 誰がこのプロジェクトのメンバーで誰はメンバーでない, などという縛りはありません. あくまでもお互いが緩く繋がって, 情報交換をしたり共同研究をしたりしている, というのが現状です.

私が初めてその言葉に出会ったのはたしか 2008 年頃、ComplexScope と呼ばれる 3 次元プラズマ流のシミュレーション結果を VR で可視化するシステムを知ったときでした。当時は「VR で 3 次元空間を可視化できるのだから、そこに何かもう少し工夫を加えてプラス 1 次元分を表現できるのではないだろうか」という安直な思いつきで VR に興味を持ち始めました。そのプラス 1 次元分を表現するにはコンピュータ・グラフィックス (CG) の技法が有効だと考え、OLM Digital の安生健一さんや九州大学の落合啓之さんに 4 次元での CG の可能性について教を請うたのもこの頃です。

その一方、当時の VR は CAVE 型と呼ばれ、大型スクリーンで全面を囲まれた部屋に入りそこに映し出された画像を観察することで没入感を得る、という大掛かりなシステムでした。実際、2012 年には神戸の理研にある  $\pi$ -CAVE というシステムを見学する機会に恵まれたのですが、残念ながら画像の解像度が非常に低く、ジュリア集合などのフラクタルを表現するには不向きでした。しかしこれらの問題は、ヘッド・マウント・ディスプレイ (HMD) 型の VR が普及し始めたことであっさりと解決されます。HMD によって画像の解像度が格段に向上し、しかも大掛かりな施設も必要無くなったために手頃な価格で VR システムを入手できるようになりました。

もう一つの大きな転機は、2017 年秋に山形大学で開催された日本数学会で、VR 研究の権威である東京大学情報理工学の廣瀬通孝先生が講演をされたことです。京都大学の稲生啓行さん、北海道大学 (当時) の荒井迅さん、山口大学 (当時) の鍛冶静雄さんら、VR 可視化に興味を持ち、時々集まっては議論をしていた数学の仲間と一緒に、講演後の廣瀬先生を半ば強引に捕まえて「VR で 4 次元空間を可視化したい」という我々の意向を聞いて頂き、日を改めて研究室を訪問する約束まで取り付けました。<sup>3</sup> 後日、本郷にある廣瀬研で我々のプロジェクトの趣旨を詳しく説明すると、「うん、それ面白い」と興味を持って頂き、そこから共同研究が始まりました。今から振り返ると、よくもまあこのような抽象的概念の可視化という我々の提案を工学系の先生が受け入れて下さったものだ、と思います。<sup>4</sup> ここに改めて、廣瀬先生の学問的寛大さに感謝致します。

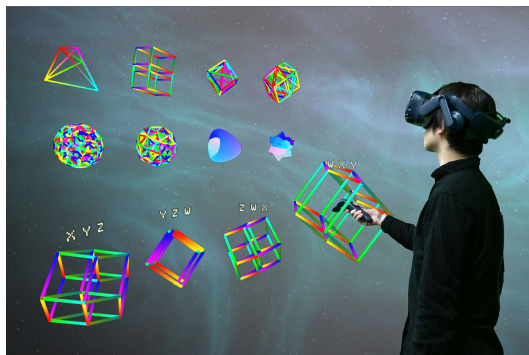


図 2: Polyvision のイメージ図

<sup>3</sup>今で言う「電凸」に近い。

<sup>4</sup>実は廣瀬先生は既に「概念の可視化」を VR の主要ターゲットの一つとして考えておられたようです。

## 2 具体的な成果

以上の経緯をきっかけに、VR を用いた 4 次元可視化の研究が動き出しました。

まず上述の廣瀬研との共同研究として、Polyvision と名付けたインタラクティブな VR デバイス (図 2) を開発しました。これは 4 次元の  $xyzw$ -空間内にある対象物を 3 次元の  $xyz$ -空間,  $yzw$ -空間,  $zwx$ -空間,  $wxy$ -空間にそれぞれ射影した四つの 3 次元図形を VR 空間に表示します。この射影像のどれか一つをコントローラで回転するとそれが元の対象物の 4 次元における運動に持ち上がり、さらにそれが他の三つの射影像に反映されるという仕組みです。しかも初期画面では、4 次元超立方体、射影平面、画像データから得られた 4 次元点群など、様々な対象物が選べるようになっています (詳しい説明は YouTube の動画<sup>5</sup> でご覧いただけます)。Polyvision の開発には、数学サイドからは稲生さん、鍛冶さん、石井、VR サイドからは廣瀬研の大学院生 (当時) だった松本啓吾さんと小川奈美さん、そして廣瀬先生がそれぞれ参加しており、数学と VR の専門家のコラボによる初めての成果と思われます。さらにこの Polyvision は CG の国際会議である SIGGRAPH Asia 2019 の Emerging Technologies 部門に採択されました。<sup>6</sup> 現在は Polyvision をベースにした心理実験が進行中で、VR を用いると本当に 4 次元空間の認知が向上するか定量的に検証することを目指しています。

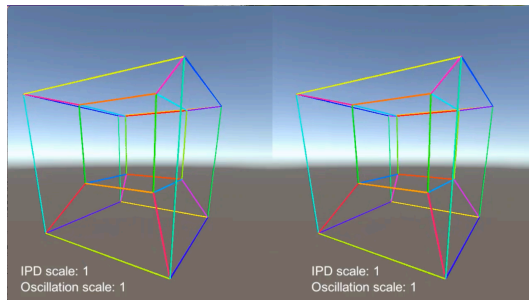


図 3: 両眼視差と運動視差の組み合わせ

続いて図 3 は稲生さんと私で試作した VR デモのスナップショットです。人間は空間の奥行きを知覚するために様々な視覚的手掛かりを用いるのですが、特にこのデモでは「両眼視差」と「運動視差」を組み合わせることで 4 次元を表現します。図 3 では、両眼視差を生み出すために左眼用の左図と右眼用の右図が微妙に異なっており、さらに実際のデモでは運動視差を生み出すためにこれらの VR 画像が周期的にゆらゆらと動きます。このアルゴリズムはこれら二つの視差効果による奥行き方向が 4 次元空間内の独立した方向に対応するように設計されており、人間の網膜が知覚する (上下方向と左右方向の) 2 次元、両眼視差の 1 次元、運動視差の 1 次元、で合わせて 4 次元分を同時に知覚できることが期待されます。

<sup>5</sup><https://www.youtube.com/watch?v=4PylcX8lnKo>

<sup>6</sup>K. Matsumoto, N. Ogawa, H. Inou, S. Kaji, Y. Ishii and M. Hirose: “Polyvision: 4D space manipulation through multiple projections”, SIGGRAPH Asia 2019 Emerging Technologies (2019).



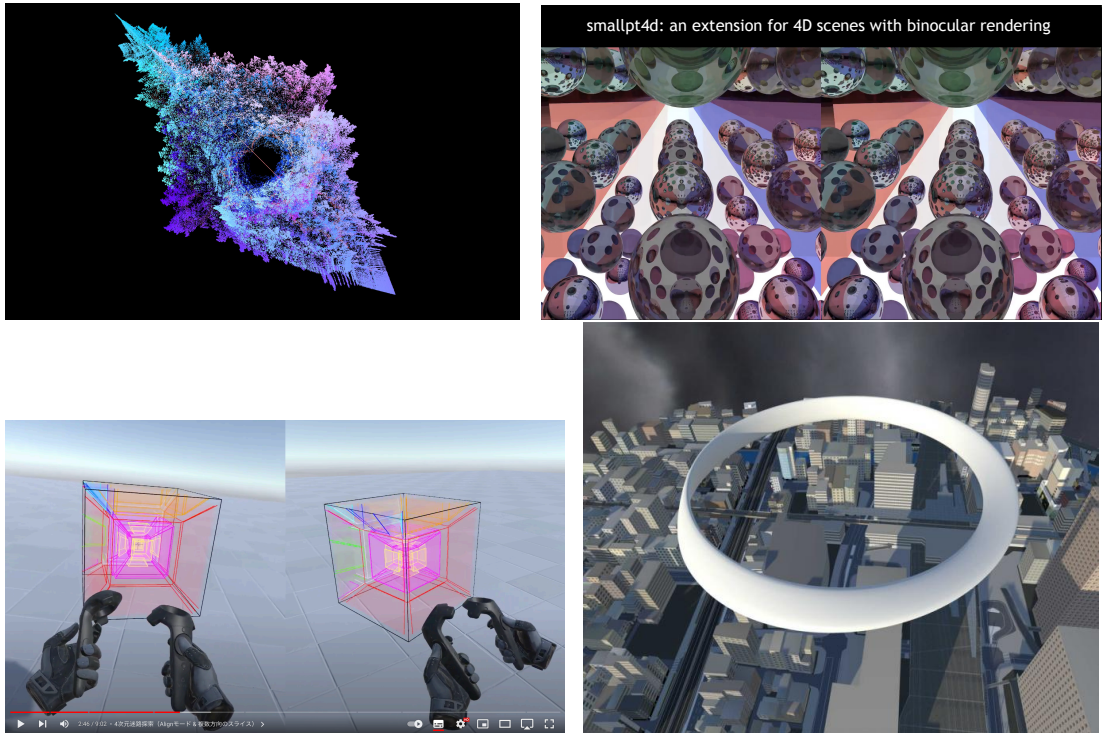


図 4: 4次元可視化に関連した様々なVRデモ

図4の左上の図は、二つの多項式  $p_a(z) = z^2 + a$  と  $p_b(z) = z^2 + b$  の相互反復力学系  $z \mapsto (z^2 + a)^2 + b$  のパラメータ空間  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  におけるマンデルブロー集合の一般化で、稲生さんが発見した「穴」を表します。もしこの数値的観察が厳密に証明出来れば、VRによって発見された初めての定理になるでしょう。右上は鍛治さんの Smallpt4d というデモで、4次元空間に格子状に配置された球面に4次元の意味でレンダリングを行いそれを3次元超平面でスライスしたものです。左下は早稲田大学の五十嵐治雄さんによる、4次元空間内の迷路をインタラクティブに楽しむことができるデモ<sup>7</sup>です。右下は松本さんらの Mobius walker というデモ<sup>8</sup>で、4次元可視化と直接の関係はないものの、あたかもメビウスの帯の上を歩いて上下感覚を失うかのような錯覚（時として刺激が強すぎて気分が悪くなることもあります）を得ることができます。他にも、明治大学の阿原一志さん、東京大学の名取雅生さんがVRを用いた数学ソフトを開発されています。一方で、名古屋大学（当時）の伊藤敦さん、東京大学の植田一石さん、KIAS（当時）の三浦真人さんらは代数幾何学と画像再構成の関連性の立場から独自の研究<sup>9</sup>を進められ、なかでも三浦さんはVRを用いた4次元空間デモの作成も活発にされています。

<sup>7</sup><https://www.youtube.com/watch?v=Ux5hdkmqKe4>

<sup>8</sup>K. Matsumoto et al, “Mobius walker: pitch and roll redirected walking”, SIGGRAPH Asia 2017 Emerging Technologies (2017).

<sup>9</sup>A. Ito, M. Miura and K. Ueda, “Projective reconstruction in algebraic vision”, Can. Math. Bull. 63 (2020), 592–609.





図 5: 4次元可視化ミーティングの様子

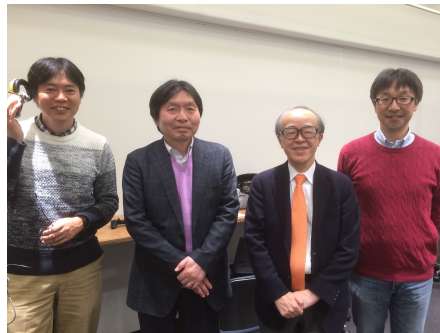


図 6: 左から、落合、河野、廣瀬、石井（敬称略）

### 3 様々な活動

以上のような研究活動を促進するために、研究環境を整備してコミュニティーを作る活動も進めました。まず第一にその核になったのは、毎年末に廣瀬先生の研究室で開催された「4次元可視化ミーティング」(図5, 図6)です。このミーティングには本拙文にお名前が挙がっている方々の多くが参加され、VRによる数学の可視化に関して、様々な論点からざっくばらんな話し合いや成果発表が行われてきました。その中の重要な話題の一つとして、数学教育におけるVRの活用があります。これについては、同じ特集の阿原さんの記事「VRと数学コンテンツ」をご覧ください。

次に、主に数学科の学生にVRに興味を持って貰うためのイベント MathEdu VR<sup>10</sup> を2019年9月に開催しました。さらに東京大学(当時)の河野俊丈先生のご尽力によって、東京大学バーチャル・リアリティ教育研究センターのご支援のもとでVR機器を備えたVRチーム<sup>11</sup>が東大数理内に創設されました。これらのイベントによって、さらにコミュニティーが広がり、数学とVRの両方に関わる院生が徐々に現れてきているようです。河野先生には様々な機会にご協力を頂き、この場を借りてお礼申し上げます。

<sup>10</sup><https://matheduvr.github.io>

<sup>11</sup><https://utms-vr.github.io>

最後に、より学術的な集会としては、京都大学の稲生さん主催による研究集会「VRを用いたインタラクティブな高次元認識」の第1回<sup>12</sup>が2021年2月に、第2回<sup>13</sup>が2022年8月に、それぞれ九州大学 IMI で開催されました。中でも第2回の集会では、4次元空間を舞台にした（とても日本の情緒にあふれた）ゲーム Miegakure<sup>14</sup> の製作者である Marc ten Bosch さんが三回の連続講演を行って、幾何学的代数（geometric algebra）を用いた高次元ユークリッド空間での回転運動の表現など、Miegakure 作成の背景にある様々な数理的技法について説明されました。

## 4 終わりに

以上が、VRを用いた4次元可視化プロジェクトの概要です。<sup>15</sup> これからもこのような活動を通じ「人間は4次元空間を直感的に知覚できるか」という根源的な問いに対するポジティブな解答を与えられるような可視化の手法を探索できれば、と考えています。

---

<sup>12</sup><https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-1438/>

<sup>13</sup><https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-6421/>

<sup>14</sup><https://miegakure.com>

<sup>15</sup>私はこのプロジェクトを Watch\_H（HはHénonやhigher dimensionを表す）と名付けたのですが、誰も使ってくれません。ちなみに順番を逆にしたH Watchは某高級腕時計です。