

VR と数学コンテンツ

明治大学大学院先端数理科学研究科

阿原 一志

1 VR を取り巻く環境

本稿では、VR と数学にまつわる社会の動向や最近の研究成果の中から、筆者が気になっているものを紹介したいと思います。国内には日本バーチャルリアリティ学会という学会が1996年からあり、バーチャルリアリティに関連する技術と文化に対する貢献を目的として活動をおこなっています。一方で筆者自身は単なる数学徒であって、VR 研究者ではありません。VR に関する記載が正確さを欠くかもしれませんが、その点はご了承ください。

VR とは仮想現実 (Virtual Reality) を略した言葉で、近年様々な場面で引き合いに出されています。コンピュータが用意した仮想の世界を我々が何らかのデバイス (装置) を使って体験すれば、それを仮想現実と呼んでよいと思うのですが、本稿では、HMD (ヘッド・マウント・ディスプレイ) を通して、架空の世界 (空間) に身をおいてその風景を見たりその世界のなかを動き回ったりできるような、そういうシステムを念頭に置くことにします。HMD とは頭からかぶるタイプのデバイスで、全視界が覆われ両眼のそれぞれに別の映像 (視差のある映像) を投射することにより、HMD をかぶっている人が立体感のある映像を見ることができるようになられたものです。3次元的な動画が立体的に見えるような方法で提示されており、あたかも自分がその3次元空間の中にいてその景色を見ているような気になる仕組みです。(自分がその空間の中にいるような感じになることを「没入感」と呼び、HMD の一つの特徴となっています。) HMD は多くの種類がありますが、たとえば Meta 社が提供する Meta Quest などが有名です。

HMD によりアクセスできる仮想空間はメタバース (Metaverse) と呼ばれ、クラウド上に構築された、3次元の仮想空間やそのサービスのことを意味します。日本では Metaverse Japan といった、VR 技術に特化した商業空間もあります。

また、VR と似ている言葉に AR (Augmented Reality / 拡張現実) や MR (Mixed Reality / 複合現実) などがあります。AR は現実の環境を拡張する意味で、メガネ状のデバイスを身に付け、実際の風景をメガネで見ながら、そこに架空の映像が重なるように投影するテクノロジーです。以前、町を歩く人を見ると、その顔のところに名前と寿命が見える … などというマンガがありましたが、(現在のテクノロジーでそこまでできるかどうかはさておいて) そういう感じです。MR は AR の中に VR が組み込まれたようなものを言います。

本稿では VR について話をしますが、架空のオブジェクト (物体) を見えるようにするという意味では同じ技術を用いていますので、VR で提示できるオブジェクトは AR や MR でも見ることができると考えてよいでしょう。

2 VRと教育

VRは広い分野の産業において技術革新を提供することが期待されています。筆者の興味あるジャンルとしては、教育分野へのVR・ARの応用です。ユーザは仮想空間（コンピュータの中にある仮想的な空間）の中に自分の分身（アバター）を置き、その中で自由に移動し、その景色を立体的に見ることができます。メタバースのように仮想空間自体がクラウドにあるとすれば、多くの人が同時に1つの仮想空間に入ることも可能ですから、参加者のアバター同士が対面して、そこで会話をすることも可能です。ユーザは手に持ったコントローラーを使って、アバターを動かしてボディーランゲージを使うことも（ある程度は）可能で、Zoomなどの遠隔会議システムよりも（何らかの意味で）リアルな対面コミュニケーションを行うことができると考えられます。

学校に通えないような人たちが仮想空間に集まり、教員も同じ空間に入ることで教室の代わりとして授業を行うことも可能です。ここで「学校に通えない」というのは、健康上の理由というだけではなく、住んでいる場所が物理的に離れていて通えない、ということも考えられます。たとえばですが、語学目的の留学が仮想空間で可能になっているところもあるようです。

世界遺産のような重要な歴史・地理のスポットが仮想空間の中に再現されていれば、VRの中で世界遺産を見学することも可能です。VR技術が広まれば「実際に訪れる」ことや「実際に人に会う」ことの意味も変わってくることになるでしょう。

3 VRによる数学教材開発

現在、仮想空間内に教員と生徒が集まり、授業を行うような学校も計画されていると聞いています。これは（コロナ禍でおなじみとなった）リアルタイム配信やオンデマンド配信とは異なる授業形態を提供することが可能になりますが、話を数学に絞って、VR技術ならではの数学授業が可能かどうか、興味あるところです。

筆者の個人的意見では、数学の講義は「レベルが高くなればなるほど、黒板とチョークがベストで十分」だと思っているので、仮想空間の中で数学の講義を行う意味を新たに見出すことは難しいようにも思います。しかし、あえて中立的な立場に立って、数学の講義をVRで行うとしたときに何が期待できるかを考察してみたいと思います。

高等学校の数学の課程のなかで、3次元空間を取り扱うものは、数学Aの立体図形、数学IIIの積分の応用（体積）と、数学Cの空間ベクトル（空間直線や空間平面のパラメータ表示を含む）だけではないかと思います。ここでは敢えて平成30年度学習指導要領の枠組みで記述しています。

大学初年度の数学までを含めると、線形代数であれば3次正方行列などについて、微積分であれば、2変数関数のグラフ・偏微分・重積分などについて、3次元的な挿絵で説明されることが多く、よいVR教材の対象となるかと思います。筆者は2019年に重積分の区分求積法の解説教材を仮想空間内に構築して、立体視を通してオンデマンドビデオ

の中で提供した経験があります。

数学向けの ICT 教材としては動的幾何ソフトウェア（ユーザがマウス操作などで自由に図形を操作できるような仕組みを提供できるソフトウェア. GeoGebra が好例である）によるものが考えられます. 実際に GeoGebra を用いれば高校・大学初年度の範囲の 3 次元空間を取り扱う教材の作成はほぼすべて可能です. (全体をカバーするように整備された形で提供されている教材セットがあるかは寡聞にしてよく知りません.) さらに, GeoGebra によって VR 用の 3 次元空間を取り扱う教材の作成は可能で, 実際に STEAM という配信プラットフォーム上に「GeoGebra Mixed Reality」というシステムが提供されています. (筆者はまだ体験していませんが, パーソナルユースのようです.)

少し愚痴になってしましますが, 日本の若者が 3 次元的な図形を頭に思い浮かべることはおしなべて不得意ではないかと思っています. (これは, 外国や過去との比較ではなく, 次の文章で述べているような, 筆者の感覚の範囲で「かくあるべき」と思う空想との比較です.) 大学の講義で重積分の見取り図を黒板に描いても, 学生は立体構造を全くイメージできていないのではないかと思いつながり描いています. 仮想空間内で多変数微積分の講義を行い, 学生の手元に 2 変数関数のグラフや偏微分や重積分の立体図を出現させれば, 3 次元的なコンテンツを手にとって見るのが可能ですし, その結果として, 空間把握能力が育成される可能性はあるかもしれません.

一方で, VR を用いた授業の教育効果についての記事や論文も見受けられるのですが, そもそも新しいテクノロジーを用いるというだけで若い人は学習意欲が高まります. 筆者の個人的意見では, VR を使いさえすれば手放しで教育効果が上がるかどうかについてはしばらく慎重に見極めたいと思っています.

より専門的な数学コンテンツの VR 化については, のちに述べることにします.

4 大学レベルでの取り組み

話題が変わりますが, 東京大学にはバーチャルリアリティ教育研究センターがあり, 「VR 研究における国際的なイニシアティブを確立するとともに, 先端技術の普及と, VR を活用した先進的教育システムの導入を推進することを目的」としています. (ホームページより抜粋.)

ここではプロジェクト研究を学内から募集しています. 2019 年度には河野俊丈先生 (当時は東大数理, 現在は明治大学総合数理学部) が代表者となり, 「数学における「概念の可視化」とその教育支援への応用」というテーマで東大数理から研究参加がありました.

数学分野での VR 研究のキックオフを目指した活動として, 東大数理に VR コンテンツを開発するためのスペースを準備し, ゲーミング PC, HMD などの機材が整備されました. VR の技術的な疑問についてサポートしてもらうために, 青山一真さん (当時は東大情報理工, 現在は東大先端研) にアドバイザーとして参加していただきました. この環境を活用して, 東大数理の大学院生など数名が VR チーム [1] を組み, 仮想空間内で 3

次元空間内の結び目の描画や変形を行うようなシステム DeformingKnot の開発を行い、このことについて研究集会で発表を行っています [2].

一般論として、こういったテクノロジーがかかわるような研究は若い人に得意な（特異な！）人が多いと思われまますので、これからの発展が期待されます。

5 ユークリッド3次元的なコンテンツ

ここからは、VR 技術を用いてどのような数学コンテンツを作成しうるのかを紹介したいと思います。3次元（もしくはそれより高次元）的なコンテンツがよいと思いますので、最初に思いつくものは空間曲線や空間曲面でしょう。

具体的に作るとなると、空間曲線の例では上で紹介した結び目理論のほか、ローレンツアトラクターなどの話題もあるかと思えます。空間曲面の例では、古典曲面やフラクタル図形が挙げられると思えます。

技術的に「何を表示できるのか」さえわかれば、あとは式に従って図形の座標計算をするだけでしょうから、そのことについて説明します。といっても話は実に簡単で、表示できるものは「空間上の小さな三角形」です。直角三角形を二つ合わせれば長方形が作れますし、長方形を細長い円柱状に並べれば太さのある線分を表示できますし、三角形を大量にならべて曲面を表示することも可能です。この三角形の表示については「表と裏を区別することが可能」で、かつ「手前にあるものが見えて奥にあるものが隠れる」ように表示されます。

空間曲面は2パラメータによる表示と、陰関数による表示がありますが、前者ではパラメータ平面を三角形に分割しておけば、そのまま「大量の三角形のあつまり」へと変換できます。陰関数による空間曲面は、空間を立方格子に分割し、陰関数の零点集合との交わりを三角形で表示すればよく、そのためのよいアルゴリズム (Marching cubes) も知られています。

筆者は実際に Fake gyroid($\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = 0$) や、Clebsch surface($x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$) を仮想空間内に表示するサンプルを作って発表しています [3].

6 ゆがんだ空間のVR表現

「数理科学」2021年4月号の特集「非ユークリッド幾何学の数学と物理」での筆者の記事「非ユークリッド幾何の世界を視る」では、サーストンの8つの3次元幾何学を可視化したというクーロンらの仕事を紹介しました [4]. 彼らは成果のグラフィックスをウェブサイト [5] で紹介しています。ここではVRでこれらのコンテンツを見るソースコードも公開されています [6]. その後、ワルシャワ大学のグループは8つの3次元幾何学の間をトンネルで結ぶようなCGコンテンツを発表しています [7][8].

ゆがんだ空間がVRの仮想空間内に実現できるからくりについて説明しましょう。仮想空間自体は(3軸の直交座標系を持つ)ユークリッド空間ではあり、ユークリッド空間 E^3 に埋め込まれた図形を、同じ空間にいる「視点」から眺めたような風景を見ることができるとするのが基本なのです。逆に、空間内に固定された視点から「視線」という名前の半直線を考え、視線が対象物と交差する点を見ることができるといいう手法もあり、レイトレーシング(Ray tracing)とも呼ばれています。レイトレーシングにおける視線は固定された視点を端点とするような半直線であることが要請されていますが、この要請を拡張することが可能です。実際に、ユークリッド以外の計量の入っている(ゆがんだ)3次元空間であっても、「視点+向きベクトル」から「視線=測地線」が決定できるのであれば、「レイトレーシングによって見る」ことができるわけです。上記のクーロンらの仕事(VR化も含めて)はこの方法によって8つの3次元幾何学内の風景を描画したものです。

クーロンらの仕事からの発展の一つとして、「3次元多面体によるタイリングに我々が没入する」ことが可能だと思います。簡単な例で平坦な3次元トーラスで説明しましょう。立方体の部屋があり、重力がなく我々は3軸のどの方向へも自由に動くことができるものとし、天井・床の向こう、四方の壁の向こうには自分のいる部屋のコピーが透けて見えるような状況をVR空間に作ることは可能です。そうすると、この仮想空間は平坦なトーラス T^3 の内部にいることと同じだと言えます。(このくらいであれば、ちょっとプログラミングができれば簡単に作るすることができます。)同じようなアイデアで、具体的に式で書いているような形状(多面体だったり球体だったり)を準備し、その境界面を貼り合わせる(=自由に行き来できる)ことにより、「多面体(軌道体)の中に住む」ことができるようになります。平坦トーラスの次に単純な例として、3次元球体を2つ準備して境界で貼り合わせたものを作れば3次元球面 S^3 に没入することができるでしょう。双曲タイリングで同じことをすれば、3次元双曲軌道体に没入することもできるようになるでしょう。

7 阿原研究室における進捗報告

最後に、明治大学大学院先端数理科学研究科阿原研究室での研究の進捗報告についても紹介します。現在、大学院で阿原研究室に所属している増田康成君は、仮想空間における多面体の形状認知の研究をしています。増田君の研究では、球に内接するような(対称性があるとは限らないような)12面体~24面体を準備し、その面数を正しく数えることにどのような人間の認知のメカニズムが関わるかを研究しています。その多面体たちを手で回転させたものを録画したとしても、それを見て面数を数えることが著しく困難なのが面白いところです[9]。一方で、実物を手に取って面数を数える場合には(数え方を指導しなくとも、数回の学習を経て)両手の指を使って面へのマーキングを行いながら、面の並びの法則性を観察する作業を通して数えることが可能になります。このとき

の「指による作業」という身体的関与が必要 [10] なのですが、彼の修士論文のテーマは、同じことを VR の仮想空間でも実現できるかということなのです。具体的な方法までここでは紹介できませんが、現時点で肯定的な実験結果が出ており、VR 学会などで発表を行っています。

References

- [1] 東大数理 VR チーム (<https://utms-vr.github.io>)
- [2] 名取雅生「VR による数学的対象の可視化」, トポロジーとコンピュータ, 2020
- [3] <https://github.com/aharalabMeiji/OculusMathematicsSurfaces> (2022 年 9 月 30 日)
- [4] Rmi Coulon, Elisabetta A. Matsumoto, Henry Segerman, Steve J. Trettel, “Ray-marching Thurston geometries”, <https://arxiv.org/abs/2010.15801>
- [5] Website “3-dimensional space”, <http://www.3-dimensional.space/>
- [6] https://github.com/henryseg/non-euclidean_VR
- [7] D. C.-Kopczynska and E. Kopczynski, “Portals to Non-Euclidean Geometries”, 2022
- [8] ZenoTheRogue, “Portals to Non-Euclidean Geometries”, YouTube (2022 年 9 月 30 日)
- [9] meijilinearalgebra, “How many faces there are?”, YouTube (2022 年 9 月 30 日)
- [10] Y. Masuda, K. Ahara, T. Komatsu, “多面体の形状把握を促進する ICT 教材の検討：VR 空間上の多面体への身体的関与の実現に向けて”, The 37th Congress of Japanese Cognitive Science Society, pp. 578–581, 2020.